Poisson 核，熱核の情報幾何学

Information geometry of Poisson kernels and heat kernels

佐藤 弘康（筑波大学大学院数理物質科学研究科）

Hiroyasu Satoh (University of Tsukuba)

（伊藤光弘氏（筑波大）との共同研究に基づく）

Joint work with M. Itoh (University of Tsukuba)

大阪市立大学数学研究所

情報幾何学研究集会 2009

平成 21 年 1 月 25 日

はじめに

Riemann 多様体

(X, g) に関連した空間 M 上の
正値確率測度全体のなす空間

$$(X, g) \xrightarrow[\text{（計量 } g \text{ が誘導）}]{\phi} \mathcal{P}(M)$$

$$\vdots$$

$$G$$

Fisher 情報計量

- 計量 g と写像 ϕ の性質（部分多様体としての）の関係.
- (Itoh-Shishido '08) Poisson 核写像 $\varphi : X \to \mathcal{P}(\partial X)$
  (X, g) : 階数 1 非コンパクト型対称空間 $\Longrightarrow \varphi$ は相似的，極小埋め込み.

1.1 統計モデルと Fisher 計量

- $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$：測度集合
- $\mathcal{P}(U, \Omega)$：$U \subset \mathbb{R}^n$（開集合）で径数付けられた正値確率密度関数の族

$$\mathcal{P}(U,\Omega) = \left\{ p(x,\xi) \,\middle|\, p(x,\xi) > 0,\ \int_{\xi\in\Omega} p(x,\xi)\, d\lambda(\xi) = 1,\ x \in U \right\}$$

$$\boxed{\text{Fisher 計量}\ \ G = \{(g_{ij}(x))\}_{x\in U}}$$

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= \int_{\xi\in\Omega} \frac{\partial}{\partial x^i} \log p(x,\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \log p(x,\xi) \cdot p(x,\xi)\, d\lambda(\xi) \\ &= \mathrm{E}_{p_x}\left[\partial_i \log p_x \cdot \partial_j \log p_x\right] \end{aligned}$$

$\uparrow$

分布 p_x による期待値

1.2 正値確率測度のなす空間と Fisher 情報計量

- M：向き付けられた多様体
- dv_M：M 上の体積要素
- $\mathcal{P}(M)$：M 上の正値確率測度全体のなす集合

$$\mathcal{P}(M) := \left\{ \mu = p\, dv_M \;\middle|\; p : M \to \mathbb{R},\ p > 0,\ \int_M \mu = 1 \right\}$$

- 接空間は $T_\mu \mathcal{P}(M) \simeq \left\{ \tau = q\, dv_M \;\middle|\; q : M \to \mathbb{R},\ \int_M \frac{q^2}{p}\, dv_M < \infty,\ \int_M \tau = 0 \right\}$.

$\boxed{\text{Fisher 情報計量 } G = \{G_\mu\}}$

$$G_\mu(\tau_1, \tau_2) = \int_M \frac{q_1}{p} \frac{q_2}{p}\, p\, dv_M, \qquad \left(\tau_i = q_i\, dv_M \in T_\mu \mathcal{P}(M),\ \mu = p\, dv_M \right).$$

1.2 正値確率測度のなす空間と Fisher 情報計量

- X：多様体
- $\varphi : X \ni x \longmapsto p(x,\xi)\, dv_M(\xi) \in \mathcal{P}(M)$：単射
- $v_1, v_2 \in T_xX$ にたいし，G の引き戻し φ^*G は

$$
\begin{aligned}
\varphi^*G(v_1, v_2) &= \int_{\xi\in M} \frac{v_1 p(x,\xi)\cdot v_2 p(x,\xi)}{p(x,\xi)}\, dv_M(\xi) \\
&= \int_{\xi\in M} v_1 \log p(x,\xi)\cdot v_2 \log p(x,\xi)\cdot p(x,\xi)\, dv_M(\xi) \\
&= \mathrm{E}_\mu \left[v_1 \log p(x,\xi)\cdot v_2 \log p(x,\xi) \right].
\end{aligned}
$$

$$\Uparrow$$

φ^*G は X で径数付けられた統計モデルの Fisher 計量

1.2 $(\mathcal{P}(M), G)$ の性質

定理（T. Friedrich, Math. Nachr. 153, 1991）

- G の Levi-Civita 接続 ∇^G は

$$\nabla^G_{\tau_1}\tau = -\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}\cdot\frac{q_1}{p} - \int_M \frac{q}{p}\cdot\frac{q_1}{p}\,\mu\right)\mu.$$

  ここで，$\tau = q\,dv_M, \tau_1 = q_1\,dv_M \in T_\mu\mathcal{P}(M)$，$\mu = p\,dv_M$．ただし，$\tau$ は各点 $\mu \in \mathcal{P}(M)$ で τ となるベクトル場と見ている.

- G の断面曲率は一定で，その値は 1/4.
- $\mathrm{Diff}_+(M)$ は $(\mathcal{P}(M), G)$ に引き戻しとして等長的に作用する（特に，M がコンパクトのとき，この作用は推移的）.
- 測地的に完備ではない.

1.2 $(\mathcal{P}(M), G)$ の性質

定理（T. Friedrich, Math. Nachr. 153, 1991）

- $c(t) = f_t\, dv_M : \mathcal{P}(M)$ 上の曲線
- $G_{c(t)}(c'(t), c'(t)) = \displaystyle\int_M \left(\frac{f_t'}{f_t}\right)^2 f_t\, dv_M = 1$

$c(t)$ が測地線 $\iff$ $f_t = \left(\dfrac{(f_0)^2 + (f_0')^2}{f_0}\right) \cos^2\left(\arctan\left(\dfrac{f_0'}{f_0}\right) - \dfrac{t}{2}\right).$

$\xi \in M$ を固定．$\arctan\left(f_0'(\xi)/f_0(\xi)\right) \in (-\pi/2, \pi/2)$ より

$$\arctan\left(\frac{f_0'(\xi)}{f_0(\xi)}\right) - \frac{T}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

を満たす $T \in \mathbb{R}$ が存在する．つまり $c(T) \notin \mathcal{P}(M)$.

1.2 例：離散型確率分布の場合

- $\mathcal{P} = \left\{ p = (p_1, p_2, p_3) \;\middle|\; p_i \in \mathbb{R},\ p_i > 0\ (i = 1, 2, 3),\ \sum_{i=1}^{3} p_i = 1 \right\}$
- $T_p\mathcal{P} \simeq \left\{ v = (v_1, v_2, v_3) \;\middle|\; v_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2, 3),\ \sum_{i=1}^{3} v_i = 0 \right\}$
- $G_p(v, v') = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{v_i v_i'}{p_i}, \quad v = (v_1, v_2, v_3),\ v' = (v_1', v_2', v_3').$
- $G_p = \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3}\right)(dp_1)^2 + \frac{2}{p_3} dp_1 dp_2 + \left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right)(dp_2)^2 \quad (p_3 = 1 - p_1 - p_2)$

$p_1 = r^2 \cos^2\theta,\ p_2 = r^2 \sin^2\theta\ (0 < r < 1,\ 0 < \theta < \pi/2)$ と変数変換すると

$$G = \frac{4}{1 - r^2}(dr)^2 + 4r^2(d\theta)^2.$$

$$\Downarrow$$

$(\mathcal{P}, G)$ は半径 2 の球面の一部（ガウス曲率 1/4）.

1.3 Poisson 核写像

Itoh–Shishido

- (X, g)：n 次元 Hadamard 多様体（単連結，完備，非正曲率）
- ∂X : X の理想境界（$(n-1)$ 次元球面と同相）
- Poisson 核とよばれる $X \times \partial X$ 上の関数 $P(x, \theta)$ を用いて，写像 φ : $(X, g) \to (\mathcal{P}(\partial X), G)$ を定義.

定理 (Itoh–Shishido, Diff. Geom. Appl. 26, 2008)

(X, g)：階数 1, 非コンパクト型対称空間

$\Longrightarrow$ Poisson 核写像は相似的かつ極小的埋め込み; $\varphi^* G = \dfrac{\rho^2}{n} g$.

ここで，ρ は (X, g) の体積エントロピー：$\rho = \displaystyle\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log \mathrm{Vol}\,(B(x; r))$.

1.3 問題と結果

- Poisson 核写像 $\varphi : X \to \mathcal{P}(\partial X)$ が相似的かつ極小 $\Longrightarrow$ 空間 X？

  階数 1 非コンパクト型対称空間の場合：$P(x,\theta) = \exp(-\rho\, B(x,\theta))$.

  Busemann 関数

  - $P(x,\theta) = \exp(-c\,B(x,\theta))$ かつ X は等質的 $\Rightarrow$ φ は相似的（§2），かつ極小（極小性の証明には調和写像の議論が必要 §3）.
  - Poisson 核写像 φ が相似的，極小 $\Rightarrow P(x,\theta) = \exp(-c\,B(x,\theta))$.（§3）
  - $\exp(-c\,B(x,\theta))$ が Poisson 核になる必要十分条件：X の漸近的調和性と可視性，$\int_{\theta\in\partial X} \exp(-B(x,\theta))\,d\theta$ が x に依らない.（§2）
  - Damek-Ricci 空間は上の 3 条件を満たす.（§4）

- 熱核でも，同様の議論ができないか？（§5）

  - 熱核写像 $\varphi_t : X \ni x \mapsto H(t,x,y)\,dv(y) \in \mathcal{P}(X)$
  - X が調和的等質 Hadamard 多様体 $\Longrightarrow \varphi_t$ は相似的（極小ではない）.

- §1) イントロダクション
- §2) Poisson 核と Busemann 関数
- §3) $\phi : (X, g) \to (\mathcal{P}(M), G)$ の調和性
- §4) Damek-Ricci 空間
- §5) 熱核の場合

2.1 Poisson 核

- (X,g)：n 次元 Hadamard 多様体（完備，単連結，非正曲率多様体）
- $\partial X = \{\gamma : [0,\infty) \to X$ ： 半開測地線, $|\gamma'| = 1\}/\sim (\simeq S^{n-1}(1) \subset T_{x_0}X)$

  ：X の理想境界（$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff d(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ が t に関して上に有界）

（x_0 を基点とする）Poisson 核 $P(x,\theta)$ ＝ 無限遠 Dirichlet 問題の基本解；

与えられた $f \in C^0(\partial X)$（境界条件）にたいして，方程式 $\Delta u = 0$，$u|_{\partial X} = f$ の解は積分表示

$$u(x) = \int_{\theta\in\partial X} P(x,\theta)\, f(\theta)\, d\theta$$

で与えられる．ただし，$d\theta$ は同一視 $\partial X \simeq S^{n-1}(1) \subset T_{x_0}X$ の下，$S^{n-1}(1)$ の標準的な単位体積要素.

Poisson 核写像 $\quad \varphi : X \ni x \longmapsto P(x,\theta)\, d\theta \in \mathcal{P}(\partial X)$

2.1 Poisson 核の存在定理（負曲率の場合）

定理（Schoen-Yau, Lect. Diff. Geom., 1994）

(X, g) を曲率条件 $-b^2 \leq K_X \leq -a^2 < 0$ を満たす Hadamard 多様体とする．このとき，基点 x_0 にたいして次を満たす関数 P が一意的に存在する;

- $\theta \in \partial X$ にたいし，$P(\cdot, \theta) \in C^0(X \cup \partial X \backslash \{\theta\})$,
- $P(\cdot, \theta)$ は X 上の正値調和関数,
- $P(x_0, \theta) = 1$,
- $\lim_{x \to \theta'} P(x, \theta) = 0 \quad (\theta' \neq \theta)$.

さらに，無限遠 Dirichlet 問題の解は $P(x, \theta)$ の積分表示で与えられる．

階数 1 非コンパクト型対称空間の場合，$\exp(-\rho B(x, \theta))$ は上の条件を満たす．

2.2 Busemann 関数

（x_0 を基点とする）Busemann 関数 $B(x,\theta)$

$\theta \in \partial X$ にたいし，x_0 を始点とし θ に漸近収束する半開測地線を γ_θ とする. このとき,

$$B(x,\theta) = \lim_{t\to\infty} \{d(x,\gamma_\theta(t)) - t\}.$$

Busemann 関数の性質

- $B(\cdot,\theta)$ は X 上の C^2 級の凸関数.
- $B(x_0,\cdot) = 0$
- $v \in T_xX$ にたいし，$vB(x,\theta) = -g(v,u)$．ただし，u は x を始点とし，θ に漸近収束する半開測地線の速度ベクトル．特に，$|\operatorname{grad}_X B(x,\theta)| = 1$.
- $B_p(x,\theta) = B_q(x,\theta) + B_p(q,\theta)$.

2.3 $P(x,\theta) = \exp(-cB(x,\theta))$ となる場合

定理 1

(X, g) を n 次元等質 Hadamard 多様体とする．Poisson 核が Busemann 関数を用いて $P(x,\theta) = \exp(-cB(x,\theta))$ と書けるとき，Poisson 核写像は相似的埋め込みである；$\varphi^* G = \frac{c^2}{n} g$．さらに極小埋め込みである．

（証明）等長変換群 $\mathrm{Isom}_+(X, g)$ は理想境界 ∂X に自然に作用．$\mathcal{P}(\partial X)$ にも引き戻しとして作用．$\psi \in \mathrm{Isom}_+(X, g)$ にたいし

- Busemann 関数の変換公式：$B(\psi x, \theta) = B(x, \psi^{-1}\theta) + B(\psi x_0, \theta)$

  $\rightsquigarrow \ P(\psi x, \theta) = P(x, \psi^{-1}\theta)\, P(\psi x_0, \theta)$.

- 無限遠 Dirichlet 問題の解の Poisson 積分表示, 解の一意性

  $\rightsquigarrow \ (\psi^{-1})^*(d\theta) = P(\psi(x_0), \theta)\, d\theta$.

2.3 $P(x,\theta) = \exp(-cB(x,\theta))$ となる場合

- 上の 2 つの条件から等長変換 ψ と Poisson 核写像 φ は次の意味で可換;

$$(\psi^{-1})^* \circ \varphi = \varphi \circ \psi.$$

- X の等質性から，基点 x_0 でのみ考えればよい;
単位ベクトル $v \in T_{x_0}X$ にたいし

$$\varphi^* G(v,v) = \int_{\partial X} (v \log P(\cdot,\theta))^2 \ P(x_0,\theta)\, d\theta = c^2 \int_{\partial X} (vB(\cdot,\theta))^2 \ d\theta$$
$$= c^2 \int_{u \in S^{n-1}(1)} \langle v, u\rangle^2 d\mu_{S^{n-1}(1)} = \frac{c^2}{n}.$$

- （極小性の証明は次節）

2.3 $P(x,\theta) = \exp(-cB(x,\theta))$ となる場合

Poisson 核が $\exp(-cB(x,\theta))$ の形で書けるための条件；

1. $\Delta_X \exp(-cB(x,\theta)) = 0$

   $\Longleftrightarrow \Delta_X B = -c$

   $\Longleftrightarrow$ Busemann 関数 $B(\cdot,\theta)$ の等位超曲面は平均曲率一定（漸近的調和）

2. $\displaystyle\lim_{x\to\theta'} \exp(-cB(x,\theta))\, d\theta = \delta_\theta(\theta')$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \bullet \displaystyle\lim_{x\to\theta'\neq\theta} B(x,\theta) = \infty \\ \qquad \Leftrightarrow \partial X \text{ の任意の 2 点は } X \text{ 上の測地線で結べる（可視公理）} \\ \\ \bullet \text{任意の } x \in X \text{ にたいして, } \displaystyle\int_{\theta\in\partial X} \exp(-cB(x,\theta)) = 1 \end{cases}$$

- §1) イントロダクション
- §2) Poisson 核と Busemann 関数
- §3) $\phi : (X, g) \to (\mathcal{P}(M), G)$ の調和性
- §4) Damek-Ricci 空間
- §5) 熱核の場合

3.1 $\phi : (X, g) \to (\mathcal{P}(M), G)$ の調和性

- (X, g) : Riemann 多様体
- (M, dv_M) : 向き付けられた多様体と体積要素
- $\mathcal{M}(X, \mathcal{P}(M)) := \{\phi : X \to \mathcal{P}(M) \,|\, \phi^* G < +\infty\}$
- $\mathcal{E} : \mathcal{M}(X, \mathcal{P}(M)) \to \mathbb{R};$

$$\mathcal{E}(\phi) = \frac{1}{2} \int_X \mathrm{trace}_g \left(\phi^* G\right) \, dv_g.$$

- $\phi \in \mathcal{M}(X, \mathcal{P}(M))$ が調和写像とは

  コンパクト台を持つ任意の変形 $\{\phi_s\}_{-\varepsilon<s<\varepsilon}$ $(\phi_0 = \phi,\ \phi_s|_{X\setminus D} = \phi)$ に対し

$$\left.\frac{d}{ds}\mathcal{E}(\phi_s)\right|_{s=0} = 0.$$

3.1 $\phi : (X, g) \to (\mathcal{P}(M), G)$ の調和性

定理 2

写像 $\phi : (X, g) \to (\mathcal{P}(M), G);\ x \longmapsto \Phi(x, \xi)\, dv_M(\xi)$ が調和写像であるための必要十分条件は

$$\operatorname{trace}_g \phi^* G(x) = 2\Delta_X \log \Phi(x, \xi) - |\operatorname{grad}_X \log \Phi(x, \xi)|^2. \qquad (*)$$

- 上の条件は $(*)$ の右辺が $\xi \in M$ に依らない関数になることと同値.
- Poisson 核写像 φ に対して,

$$((*)\text{ の右辺}) = |\operatorname{grad}_X \log P(x, \theta)|^2.$$

- さらに $P(x, \theta) = \exp(-cB(x, \theta))$ と書けるとき, $\varphi : X \to \mathcal{P}(\partial X)$ は調和写像.

3.3 Poisson 核写像が相似的かつ調和のとき

$$\text{“}\,\phi\ \text{が調和} \iff \operatorname{trace}_g \phi^* G(x) = 2\Delta_X \log \Phi(x,\xi) - |\operatorname{grad}_X \log \Phi(x,\xi)|^2\,\text{”}$$

Poisson 核写像 φ が相似的 ($\varphi^* G = c^2/n\, g$) かつ調和

$\Longrightarrow |\operatorname{grad}_X \log P(x,\theta)| = c$

$\Longrightarrow u(x,\theta) = \frac{1}{c}\log p(x,\theta)$ とおくと $|\operatorname{grad}_X u(\,\cdot\,,\theta)| = 1$

$\Longrightarrow u(\,\cdot\,,\theta)$ の勾配流 $\sigma_\theta(t)$ は測地線. (T. Sakai, Kodai Math. J. 19, 1996)

$\Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \sigma_\theta(t) = \theta$ となり, $d\,(u(\,\cdot\,,\theta) - B(\,\cdot\,,\theta)) = 0$. $\Longrightarrow u(x,\theta) = B(x,\theta)$.

定理 3

X 上の Poisson 核写像 φ が相似的埋め込みで調和ならば, X の Poisson 核は Busemann 関数を用いて指数関数表示できる. さらに X は漸近的調和かつ可視公理を満たす.

3.3 関連する結果

定理 (酒井, Riemann 幾何学, 1992)

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 = \langle \nabla u, \nabla\Delta u\rangle - \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) - |\mathrm{Hess(u)}|^2$$

$u(x,\theta) = \frac{1}{c}\log P(x,\theta)$ にたいして，$\mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) = -|\mathrm{Hess(u)}|^2$

定理 (J. Heber, Geom. Funct. Anal. 16, 2006)

X を非コンパクト，単連結，等質空間とする．このとき，以下は同値;

- X は漸近的調和，Einstein 多様体.
- X は平坦空間，階数 1 非コンパクト型対称空間，（対称空間でない）Damek-Ricci 空間のいずれか.

- §1) イントロダクション
- §2) Poisson 核と Busemann 関数
- §3) $\phi : (X, g) \to (\mathcal{P}(M), G)$ の調和性
- §4) Damek-Ricci 空間
- §5) 熱核の場合

4.1 一般 Heisenberg 群

一般 Heisenberg 代数

- $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{n}})$: 2-step 冪零 Lie 環とその内積.
- $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$（$\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{n}$ の中心，$\mathfrak{v}$ は $\mathfrak{z}$ の直交補空間）.
- $Z \in \mathfrak{z}$ にたいし，$J_Z : \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}; \langle J_Z V, V' \rangle_{\mathfrak{n}} = \langle Z, [V, V']_{\mathfrak{n}} \rangle_{\mathfrak{n}}$.
- $(J_Z)^2 = -|Z|^2 \,\mathrm{id}_{\mathfrak{v}}$ $(\forall Z \in \mathfrak{z})$ のとき，$\mathfrak{n}$ を一般 Heisenberg 代数とよぶ.

一般 Heisenberg 群

- 一般 Heisenberg 代数 $\mathfrak{n}$ を Lie 環とし，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{n}}$ から定まる左不変計量を備えた単連結冪零 Lie 群 N.
- $N \simeq \mathfrak{v} \times \mathfrak{z}$ と同一視したときの群構造；

$$(V, Z) \cdot (V', Z') = \left(V + V',\ Z + Z' + \frac{1}{2}[V, V']_{\mathfrak{n}} \right). \tag{23}$$

4.2 Damek-Ricci 空間

- $\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \mathbb{R}$ ($\mathfrak{n}$: 一般 Heisenberg 代数).
- ブラケット積 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{s}}$;

$$[(V,Z,l),(V',Z',l')]_{\mathfrak{s}} = \left(\frac{l}{2}V' - \frac{l'}{2}V,\ lZ' - l'Z + [V,V']_{\mathfrak{n}},\ 0\right).$$

- 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{s}}$; $\langle(V,Z,l),(V',Z',l')\rangle_{\mathfrak{s}} = \langle V,V'\rangle_{\mathfrak{n}} + \langle Z,Z'\rangle_{\mathfrak{n}} + ll'$.

Damek-Ricci 空間

- $\mathfrak{s}$ を Lie 環とし，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{s}}$ から定まる左不変計量を備えた単連結 Lie 群 S.
- $S \simeq \mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}_+$ と同一視したときの群構造;

$$(V,Z,a)\cdot(V',Z',a') = \left(V + \sqrt{a}V',\ Z + aZ' + \frac{\sqrt{a}}{2}[V,V']_{\mathfrak{n}},\ aa'\right).$$

4.2 Damek-Ricci 空間 S の性質

- Hadamard 多様体．$K_S < 0$ ならば，S は階数 1 非コンパクト型対称空間のいずれか（I. Dotti, Proc. Amer. Math. Soc. 125, 1997）．
- $\mathbb{C}H^N, \mathbb{H}H^N, \mathbb{O}H^2$（$\dim \mathfrak{z} = 1$）．特別な場合として，$\mathbb{R}H^N$（$\dim \mathfrak{z} = 0$）．
- $\gamma(0) = (\mathbf{0}_{\mathfrak{v}}, \mathbf{0}_{\mathfrak{z}}, 1)$，$\gamma'(0) = (U, W, l) \in \mathfrak{s}$（$|U|^2 + |W|^2 + l^2 = 1$）の測地線は

$$\gamma(t) = \frac{1}{\chi}\left(2r(1 - lr)U + 2r^2 J_W U,\ 2rW,\ 1 - r^2\right).$$

ただし，$r = \tanh\left(\frac{t}{2}\right)$, $\chi = (1 - lr)^2 + |W|^2 r^2$.

(Berndt-Tricerri-Vanhecke, Lecture Notes in Math. 1598, 1995)

- 理想境界は $\partial S \simeq N \cup \{\infty\}$
- 漸近的調和．また可視公理を満たす．
- 体積エントロピー $\rho = \frac{1}{2}\dim \mathfrak{v} + \dim \mathfrak{z}$（homogeneous dimension）．

4.3 Damek-Ricci 空間 S の Busemann 関数

定理 4

Damek-Ricci 空間 S の Busemann 関数および，$\partial S \simeq N$ 上の標準体積要素は以下で与えられる（$x = (V, Z, a) \in S$）.

$$B(x,\theta) = \begin{cases} -\log\left(\dfrac{a\left(\left(1+\frac{1}{4}|v|^2\right)^2+|z|^2\right)}{\left(a+\frac{1}{4}|v-V|^2\right)^2+\left|z-Z-\frac{1}{2}[V,v]_{\mathfrak{n}}\right|^2}\right) & \text{if } \theta = (v,z) \in N \\ -\log a & \text{if } \theta = \infty \end{cases}$$

$$d\theta = c\left\{\left(1+\frac{1}{4}|v|^2\right)^2+|z|^2\right\}^{-\rho} dv dz \qquad ((v,z)\in N)$$

さらに，$\int_N \exp\{-\rho\, B(x,\theta)\}\, d\theta = 1$ が成り立つ.

$\Longrightarrow$ Damek-Ricci 空間 S 上の Poisson 核写像は相似的かつ調和.

4.4 注意：Damek-Ricci 空間 S の Poisson 核

E. Damek (Colloq. Math. 53, 1987)

- $P_a(n) = \dfrac{ca^\rho}{\left\{\left(a + \frac{1}{4}|V|^2\right)^2 + |Z|^2\right\}^\rho} \qquad (n = (V, Z), a > 0)$

  ただし，c は $\int_{n\in N} P_a(n)\,dn = 1$ となる定数.
- $\Delta P = 0$.
- $\lim_{a\to 0} f * P_a(n) = f(n) \qquad (f \in L^p(N))$．ただし

$$f * P_a(n) = \int_{m\in N} P_a(nm^{-1})\,f(m)\,dm.$$

これは $P_a(n)$ が S 上の無限遠 Dirichlet 問題の基本解を与えることを意味する $(\partial S \simeq N)$．実際に

$$P_a(nm^{-1})\,dm = \exp\left(-\rho B((n, a), m)\right)\,d\theta(m).$$

- §1) イントロダクション
- §2) Poisson 核と Busemann 関数
- §3) $\phi : (X, g) \to (\mathcal{P}(M), G)$ の調和性
- §4) Damek-Ricci 空間
- §5) 熱核の場合

5.1 熱核

(X, g)：完備 Riemann 多様体

$\boxed{\text{熱方程式}}$; 与えられた $f \in C^\infty(X)$（初期条件）にたいして

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) u(t, x) = 0, \quad u(0, x) = f(x).$$

$\boxed{\text{熱核 } H(t, x, y)}$ = 熱方程式の基本解 ;
熱方程式（初期条件 $f \in C^\infty(X)$）の解は

$$u(t, x) = \int_{y \in X} H(t, x, y)\, f(y)\, dv(y)$$

で与えられる.

5.1 熱核写像

熱核写像　$\varphi_t : X \ni x \longmapsto H(t,x,y)\,dv(y) \in \mathcal{P}(X)$

定理 5

(X,g)：調和的 Hadamard 多様体

$\Longrightarrow$ 熱核写像は相似的埋め込み：$\varphi_t^* G = C(t)g$.

調和的：各点 $p \in X$ にたいし，p 中心とする正規座標系に関する体積密度関数 $\omega_p = \sqrt{\det(g_{ij})}$ が動径関数 $\omega_p(x) = \omega(d(p,x))$ となる.

強調和的：熱核が動径的関数; $H(t,x,y) = H(t,d(x,y))$.

- 強調和的 $\Longrightarrow$ 調和的．多様体が単連結ならば，強調和的 $\Longleftrightarrow$ 調和的.
- 調和 $\Longrightarrow$ 漸近的調和（共役点をもたない空間において）

5.3 定理 5 の証明

- $\varphi_t^* G(v, v) = \displaystyle\int_{y \in X} (v \log H(t, x, y))^2 \, H(t, x, y) \, dv(y) \qquad (v \in T_x X).$
- (X, g) は単連結，調和的．よって強調和的．

$$\rightsquigarrow \begin{cases} v \log H(t, x, y) = \frac{1}{H(t,r)} \frac{\partial H}{\partial r}(t, r) \cdot (-\langle v, u \rangle). \\ dv = \Omega(r) dr \, d\mu_{S^{n-1}(1)}. \ (\Omega \text{ は } x \in X \text{ の選び方によらない}) \end{cases}$$

以上のことから

$$\begin{aligned} \varphi_t^* G(v, v) &= \int_0^\infty \frac{1}{H(t, r)} \left(\frac{\partial H}{\partial r}(t, r) \right)^2 \Omega(r) \, dr \int_{u \in S^{n-1}(1)} \langle v, u \rangle^2 d\mu_{S^{n-1}(1)} \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{H(t, r)} \left(\frac{\partial H}{\partial r}(t, r) \right)^2 \Omega(r) \, dr \cdot \frac{\mathrm{Vol}(S^{n-1}(1))}{n}. \end{aligned}$$

右辺は $v \in T_x X$ に依らないことから，$\varphi_t^* G = C(t) \, g$ と書ける．（証明おわり）

5.3 相似定数 $C(t)$

- $n\,C(t) = \mathrm{trace}_g\,(\varphi_t^* G) = \displaystyle\int_{y\in X} |\,\mathrm{grad}_x \log H(t,x,y)|^2 H(t,x,y)\,dv(y).$
- 熱方程式より，$|\,\mathrm{grad}_x \log H(t,x,y)|^2 = \left(\Delta_x + \frac{\partial}{\partial t}\right)\log H(t,x,y).$
- 強調和性より，$|\,\mathrm{grad}_x \log H(t,x,y)| = |\,\mathrm{grad}_y \log H(t,x,y)|.$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{trace}_g\,(\varphi_t^* G) &= \int_{y\in X} \left(\Delta_y + \frac{\partial}{\partial t}\right) \log H(t,x,y)\cdot H(t,x,y)\,dv(y) \\
&= \int_{y\in X} \Delta_y \log H(t,x,y)\cdot H(t,x,y)\,dv(y) + \int_{y\in X} \frac{\partial}{\partial t} H(t,x,y)\,dv(y) \\
&= \int_{y\in X} \log H(t,x,y)\cdot \Delta_y H(t,x,y)\,dv(y) \quad \text{←Damek-Ricci 空間のとき成立} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\underbrace{-\int_{y\in X} \log H(x,t,y)\cdot H(t,x,y)\,dv(y)}_{\text{エントロピー}}\right)
\end{aligned}
$$

5.4 例）n 次元 **Euclid** 空間の場合

- 熱核：$H(t,x,y) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)$
- 相似定数 $C(t) = \frac{1}{2t}$，エントロピーは $\frac{n}{2}(\log(4\pi t)+1)$.
- $\varphi_t : (\mathbb{R}^n, g_0) \to (\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), G)$ は調和写像ではない.

Li-Yau's gradient estimate

(X,g) を Ricci 曲率が非負の完備 Riemann 多様体とする．このとき，熱方程式の解 $u(t,x)$ は以下の不等式を満たす;

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial t} \le \frac{n}{2t}.$$

$$\left(\Longrightarrow \ \frac{1}{n}\operatorname{trace}_g(\varphi_t^* G) \le \frac{1}{2t} \right)$$