＜最適化問題と情報幾何＞
対称錐線形計画法と群作用

大阪市立大学数学研究所 情報幾何学研究集会 2009
OCAMI meeting on “ Information Geometry 2009 ”

2009年1月24日(土)・25日(日)

魚橋　慶子
東北学院大学
工学部　機械知能工学科
uohashi@tjcc.tohoku-gakuin.ac.jp

内容

0. はじめに
1. 対称錐とは
2. 対称錐線形計画法
3. 対称錐線形計画法と情報幾何
4. 主双対内点法の探索方向と情報幾何
5. 対称錐線形計画問題への群作用と情報幾何

0. はじめに

- 最適化問題のクラスの包含関係

{Linear Programming (LP: 線形計画法) }

⊂ {Semi Definite Programming (SDP: 半正定値計画法) }

⊂ {Linear Programming over Symmetric Cone (対称錐線形計画法) } : 大きなクラス

⊃ {Second Order Cone Programming (SOCP: 2次錐計画法)}

1. 対称錐とは

- Euclidean Jordan algebraから生成される symmetric cone（対称錐）は本質的に5種類

（1）2次錐 ：$\{ x \in R^{n+1} \mid x_{n+1}^2 > \sum_{i=1}^{n} x_i^2, x_{n+1} > 0 \}$

（2）n×n実正定値対称行列の集合

（3）n×n複素正定値エルミート行列の集合

（4）n×n四元数正定値エルミート行列の集合

（5）3×3八元数正定値エルミート行列の集合

- symmetric cone

$\Leftrightarrow$homogeneous (等質) かつself-dual (自己双対)
なcone

(注) V: finite dim. real vector space,
< , >:inner product on V
に対し、 $\Omega \subset V$ が

☆ convex cone $\Leftrightarrow \forall x, y \in \Omega, \forall \lambda, \mu > 0, \lambda x + \mu y \in \Omega$

☆ homogeneous $\Leftrightarrow \forall x, y \in \Omega, \exists g \in Aut(\Omega)$s.t. $gx = y$

☆ self-dual $\Leftrightarrow$ $\Omega = \Omega^* \cong \{x \mid <x, y>> 0, \forall y \in \Omega\}$

- Jordan algebra is Euclidean $\Leftrightarrow \exists$< , >:inner product
s.t. $\forall x, y, z \in V, < L(x)y, z >=< y, L(x)z >$

2. 対称錐線形計画法

・記号

$(V, \circ)$：Euclidean Jordan alg.

$\Omega \cong \{x^2 \mid x \in V, x : invertible\} \subset V$：cone of squares

(V から生成される sym. cone)

$X \subset V$：vector subspace

$< x, y > \cong tr(x \circ y)$ （tr はJor. alg.としての trace）

$X^{\perp} \cong \{y \in V \mid < x, y > = 0, x \in X\}$

$\overline{\Omega}$：closure of Ω

ri：relative interiors

・対称錐線形計画問題

$a \in X$, $b \in X^{\perp}$

(P) $< a, x > \to \min \quad s.t. \quad x \in (b + X) \cap \bar{\Omega} \cong P$ ：主問題

(D) $< b, y > \to \min \quad s.t. \quad y \in (a + X^{\perp}) \cap \bar{\Omega} \cong D$ ：双対問題

○ Prop. [Faybusovich(1997)]

$ri(P) \neq \phi, \ ri(D) \neq \phi$ かつ問題 (P)，(D)それぞれの最適解集合が有界ならば次が成立する.

x は(P)の最適解 かつ y は(D)の最適解

$\Leftrightarrow \quad x \circ y = 0$

$\Leftrightarrow \quad < x, y >= 0$

・注意：　$\beta > 0$ に対し，２つの最適化問題

(P$_\beta$)　$f_\beta(x) \cong \beta < a, x > - \log\det(x) \to \min \quad s.t. \; x \in ri(P)$

(D$_\beta$)　$g_\beta(y) \cong \beta < b, y > - \log\det(y) \to \min \quad s.t. \; y \in ri(D)$

(det はJor.alg.としての)

はそれぞれ唯一の最適解をもつ．かつ

$x(\beta), \quad y(\beta)$：最適解

$\Leftrightarrow \; x(\beta) \in ri(P), \; \beta a - x(\beta)^{-1} \in X^{\perp},$

$y(\beta) \in ri(D), \; \beta b - y(\beta)^{-1} \in X.$

$\Leftrightarrow \; x(\beta) \in ri(P), \; y(\beta) \in ri(D), \; x(\beta) \circ y(\beta) = \dfrac{e}{\beta}.$

$\left(\because y(\beta) = \dfrac{1}{\beta} x(\beta)^{-1} \right)$　　(e：Jor.alg.の単位元)

が成立する．さらに $\beta \to \infty$ のとき

$x(\beta) \to$ ((P) の解)，$y(\beta) \to$ ((D) の解)

3．対称錐線形計画法と情報幾何

Ω：sym. cone $\subset V$：Jor. alg.

∇：canonical flat affine connection on V

$\psi(x) \cong -\log\det(x)$

$(\Omega, \nabla, g \cong \nabla d\psi)$：statistical manifold

$(ri(P), \nabla, g)$：statistical submanifold

〇Prop. [Ohara,Tsuchiya][Uohashi; OCAMI 2006]

最適化問題（P_β）の解 $x(\beta)$ は dual submanifold $(ri(P), \nabla^*, g)$上で，∇ の dual connection ∇^*の測地線に沿って（P）の解へ $\beta \to \infty$ のとき近づく．

・注意

☆ map $\iota: \begin{array}{c}\Omega \to \Omega \\ x \mapsto x^{-1}\end{array}$ により双対座標 (dual coord.)

$$x_i^* \cong x^i \circ \iota = -\frac{\partial \psi}{\partial x^i} = \frac{\partial(\log \det)}{\partial x^i}$$

が定まる (x^i:主座標 (canonical affine coord.))

☆ (P_β) の解 $x(\beta)$ の双対座標の値は,

・Ω 上では $x(\beta)^{-1}$ の x^i-成分 ($i = 1, \cdots, n \cong \dim V$)

・$ri(P)$ 上では (vector subspace X 上へ座標を設定したときの) βa の x^i-成分 ($i = 1, \cdots, m \cong \dim X$)

☆ $y(\beta)$の ($X^\perp$上での) x^i-成分 ($i = m+1, \cdots, n$) は,

Ω上での $x(\beta)$ の双対座標の$X^\perp$-成分の $\frac{1}{\beta}$ 倍

4．主双対内点法の探索方向と情報幾何

- 対称錐線形計画問題の組（P）,（D）の求解に換え，

$$x(\beta)\circ y(\beta)=\frac{e}{\beta},\ x(\beta)\in ri(P),\ \ y(\beta)\in ri(D)$$

をみたす $\left(x(\beta),\ y(\beta)\right)$ の $\beta\to\infty$ での軌跡（内点流）をニュートン法によりたどり，極限を求める．

☆最適化問題（P）,（D）の主双対内点法による求解

- ニュートン探索方向 $(\Delta x, \Delta y)\in X\times X^{\perp}$

$$L(y)\Delta x+L(x)\Delta y=\frac{e}{\beta}-x\circ y$$

- 記号：$L(x)$, $P(x)$: endomorphisms on V
  $L(x)y=x\circ y$, $P(x)=2L(x)^2-L(x^2)$

・ニュートン探索方向 $(\Delta x, \Delta y)$ の定義の例

☆NT方向 (NT direction (Nesterov-Todd direc.))

$$(\Delta x,\ \Delta y) = (P(z)^{-\frac{1}{2}}\Delta\tilde{x},\ P(z)^{\frac{1}{2}}\Delta\tilde{y}) \in V \times V$$

where $(\tilde{x},\ \tilde{y}) \cong (P(z)^{\frac{1}{2}}x,\ P(z)^{-\frac{1}{2}}y)$,

$$P(z)^{\frac{1}{2}}x = P(z)^{-\frac{1}{2}}y$$

- primal-dual scaling とよばれる
- [Uohashi; OCAMI 2006] スケーリングに

利用される点 $z = P(x^{-\frac{1}{2}})(P(x^{\frac{1}{2}})y)^{\frac{1}{2}}$ は

Levi-Civita接続による x^{-1} から y への

測地線の中点 (x^{-1} と y の幾何平均)

☆Power class による定義 [Muramatsu(2002)]

$$(\Delta x,\ \Delta y) = (P(z)^{-\frac{1}{2}}\Delta\tilde{x},\ P(z)^{\frac{1}{2}}\Delta\tilde{y})$$

where $(\tilde{x},\ \tilde{y}) \cong (P(z)^{\frac{1}{2}}x,\ P(z)^{-\frac{1}{2}}y)$,

$$(P(z)^{\frac{1}{2}}x)^q = P(z)^{-\frac{1}{2}}y \quad (q = 0, 1, 2, \cdots)$$

・ $q = 1$ のとき NT-方向に一致

・ [Uohashi] スケーリングに利用される点

$z = P(x^{-\frac{1}{2}})(P(x^{\frac{1}{2}})y)^{\frac{1}{q+1}}$ はLevi-Civita接続による

x^{-1} から y への測地線を, 1対 q に分ける点

・Levi-Civita接続による x^{-1} から y への測地線は

$P(x^{-\frac{1}{2}})(P(x^{\frac{1}{2}})y)^s$， $s \in [0,1]$ [Ohara(2004)]

- Power class によるスケーリングの特徴

  “ $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ share a Jordan frame.”

  ☆ニュートン方向が一意に定まる性質

- $\forall x \in V,\ \exists c_1, \cdots, c_r \in V,\ \exists \lambda_x^1, \cdots, \lambda_x^r \in R$

  (s.t. $c_i \circ c_i = c_i,\ c_i \circ c_j = 0\ (i \neq j),\ c_1 + \cdots + c_r = e$)

  s.t $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_x^i c_i$: spectral decomposition of x

  $\Rightarrow$ $c_1, \cdots, c_r$:Jordan frame of x

- x , y share a Jordan frame.

  $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_x^i c_i,\ \ y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_y^i c_i$ （固有ベクトルが等しい）

5. 対称錐線形計画問題への群作用と情報幾何

・対称錐線形計画問題への群作用

G： $Aut(\Omega)$ (automorphism group of Ω) の
単位元の連結成分

$g^{-1},\ g^{*}$： inverse, adjoint of $g \in G$

最適化問題 (P) , (D) へ $g \in G$ を作用させると

$$\tilde{a} = g^{-*}a, \quad \tilde{b} = gb, \quad \tilde{X} = gX, \quad \tilde{X}^{\perp} = g^{-*}X^{\perp}$$

$$(\tilde{P}) \quad <\tilde{a},\tilde{x}> \to \min \quad s.t. \ \tilde{x} \in (\tilde{b} + \tilde{X}) \cap \overline{\Omega} \cong \tilde{P}$$

$$(\tilde{D}) \quad <\tilde{b},\tilde{y}> \to \min \quad s.t. \ \tilde{y} \in (\tilde{a} + \tilde{X}^{\perp}) \cap \overline{\Omega} \cong \tilde{D}$$

☆ $(\tilde{P})$ $(\tilde{D})$ は (P) , (D) に equivalent

☆ $g = P(z)^{-\frac{1}{2}},\ g^{-*} = P(z)^{\frac{1}{2}}$ のとき

ニュートン探索方向のスケーリングを表す.

・確認： $\tilde{x} = gx,\ \tilde{y} = g^{-*}y$ とおくと

$$< \tilde{a}, \tilde{x} > = < g^{-*}a, gx > = < a, g^{-1}gx > = < a, x >$$
$$< \tilde{b}, \tilde{y} > = < gb, g^{-*}y > = < g^{-1}gb, y > = < b, y >$$

○Prop. 最適化問題（P），（D）を主双対内点法により求解するときの内点流は, 群作用により不変である.
（（P），（D）の内点流 $x(\beta),\ y(\beta)$（ $\beta > 0$ ）は（$\tilde{P}$）（$\tilde{D}$）の内点流へ移る.）

- Proof of Prop.： $\beta > 0$ に対し，2つの最適化問題

$$(\tilde{P}_\beta)\ \tilde{f}_\beta(\tilde{x}) = \beta < \tilde{a}, \tilde{x} > - \log\det(\tilde{x}) \to \min\ \ s.t.\ \ \tilde{x} \in ri(\tilde{P})$$

$$(\tilde{D}_\beta)\ \tilde{g}_\beta(\tilde{y}) = \beta < \tilde{b}, \tilde{y} > - \log\det(\tilde{y}) \to \min\ \ s.t.\ \ \tilde{y} \in ri(\tilde{D})$$

の最適解を $\tilde{x}(\beta)$, $\tilde{y}(\beta)$ とする．

$$\tilde{f}_\beta(\tilde{x}) = \beta < \tilde{a}, \tilde{x} > - \log\det(\tilde{x}) = \beta < a, x > - \log\det(gx),$$

$$D_x \tilde{f} = \beta a - g D_{\tilde{x}} \log\det(\tilde{x}) = \beta a - g\tilde{x}^{-1} = \beta a - g(g^{-1}x^{-1})$$
$$= \beta a - x^{-1}.$$

ゆえに $x \in ri(P)$ ならば

$$D_x \tilde{f}_\beta = 0 \Leftrightarrow (x^{-1} \text{ の } X \text{ −成分}) = \beta a \Leftrightarrow \beta a - x^{-1} \in X^\perp.$$

よって $D_x \tilde{f}_\beta = 0$ をみたす $x \in ri(P)$ は (P_β) の解 $x(\beta)$.

$$\beta a - x(\beta)^{-1} \in X^\perp$$

より

$$g^{-*}(\beta a - x(\beta)^{-1}) = \beta\tilde{a} - (gx(\beta))^{-1} \in g^{-*}X^\perp = \tilde{X}^\perp$$

（Proof 続き） g の作用が線形であるから,

$$D_x \tilde{f}_\beta = 0 \iff D_{\tilde{x}} \tilde{f}_\beta = 0$$

ゆえに（$\tilde{P}_\beta$）の最適解は $\tilde{x}(\beta) = gx(\beta)$

$\therefore \beta\tilde{a} - \tilde{x}(\beta)^{-1} \in \tilde{X}^{\perp}$

$\iff$（$\tilde{x}(\beta)^{-1}$ の $\tilde{X}$ -成分）=（$\beta\tilde{a}$ の $\tilde{X}$ -成分）

したがって（P）の内点流 $x(\beta)$（$\beta > 0$）は

（$\tilde{P}$）の内点流 $\tilde{x}(\beta)$（$\beta > 0$）に移る.

（かつ, $\tilde{x}(\beta)$（$\beta > 0$）は $ri(\tilde{P})$ の双対測地線に沿っている.）

$y(\beta)$, $\tilde{y}(\beta)$ についても同様. □

○Cor. $\tilde{x}(\beta)$, $\tilde{y}(\beta)$ が $(\tilde{P}_\beta)$, $(\tilde{D}_\beta)$ の最適解

$$\Leftrightarrow \ \beta\tilde{a} - \tilde{x}(\beta)^{-1} \in \tilde{X}^{\perp},\ \beta\tilde{b} - \tilde{y}(\beta)^{-1} \in \tilde{X},$$

$$\tilde{x}(\beta) \circ \tilde{y}(\beta) = \frac{e}{\beta}$$

○Cor. $\tilde{y}(\beta) = \dfrac{1}{\beta}\tilde{x}(\beta)^{-1}$ は, Ω における $\tilde{x}(\beta)$ の

双対座標の $X^{\perp}$-成分を $\dfrac{1}{\beta}$ 倍したもの.

☆ただし $\beta a + X^{\perp}$ 上の双対座標を,

点 βa が原点となるように設定する.

参考文献

・Faraut J. ,Kor¥'anyi A.: Analysis on Symmetric Cones, Oxford (1994).
・Faybusovich L.： Linear systems in Jordan algebras and primal-dual interior-point algorithms, J. Computational and Applied Math. 86 (1997), 149-175.
・寒野,大崎,室田,加藤：半正定値計画法に対する主双対内点法の群対称性, 数理解析研究所講究録, 1241, 214-222, Kyoto Univ. , Kyoto (2001)
・Kanno Y. ,Ohsaki M. , Murota K. and Katoh N. ,Group symmetry in interior-point methods for semidefinite program,Optim.and Engineering,2,293-320(2001)
・Muramatsu M.: On commutative class of search directions for linear Programming over symmetric cones, J. Optim.Theory Appl.112(3), 595-625 (2002)
・Ohara A.: Geodesics for dual connections and means on symmetric cones, Integr. Eq. Oper. Theory, 50, 537-548 (2004)
・Ohara A. ,Tsuchiya T.: An information geometric approach to polynomial-time interior-point algorithms -complexity bound via curvature integral-, Foundation of Computational Mathematics, submitted for publication.
・Uohashi K.: Primal-dual interior-point methods and dualistic structure on symmetric cones, 数理解析研究所講究録, 1584, 1-7, Kyoto Univ., Kyoto (2008)
・ Uohashi K.: Power class of search directions and dualistic structure on symmetric cones, in preparation.