統計多様体上のシンプレクティック構造について

野田　知宣　（大阪歯科大学）

大阪市立大学数学研究所 情報幾何関連分野研究会 2010
「情報工学への幾何学的アプローチ」

平成22年 2月20日（先勝）

§ 1 Intro.

シンプレクティック構造

M : 可微分多様体
ω : 2-形式

s.t. (i) $d\omega = 0$;
(ii) $\omega^\flat : T_x M \to T_x^* M$: iso. $({}^\forall x \in M)$

例 1.

$$M = \mathbb{R}^{2n} \quad (q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$$

$$\left[\begin{aligned} M &= T^*\mathbb{R}^n \\ \omega &= d\left(\sum p_i dq^i\right) \end{aligned}\right]$$

Hamilton 方程式

$$\omega^\flat(X_H) = dH$$

例 1では
$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial q^i} \\[2ex] \dfrac{dq^i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

(S, g, ∇) 統計多様体 $(T^{\nabla} = 0$ & $\nabla g \in \mathrm{Sym}^3)$

に対し

(i) S 上のシンプレクティック構造

(ii) T^*S 上のシンプレクティック構造

(iii) M 上のシンプレクティック構造

例:
T. Friedrich, Y. Shishido,
O.E. Barndorff-Nielsen and P.E. Jupp,
Y. Nakamura, T. Mabuchi

定理（簡易版）

これらは実質同じ

M

$$T^n \curvearrowright \mathbb{C}P^n \quad \longrightarrow \quad \mu : \mathbb{C}P^n \to \mathrm{Lie}(T^n) \cong \mathbb{R}^n$$

moment map

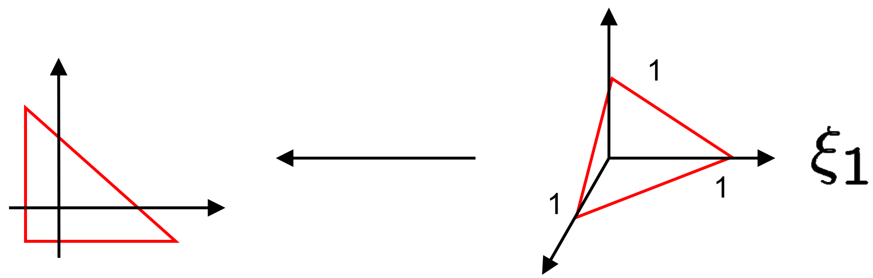
$\mathbb{C}P^n$ ω:FS

dual

μ

g : Fisher

$\mathcal{P}(\{x_0, \ldots, x_n\})$



§２ 統計モデルと統計多様体

$(X, B, \mathrm{d}x)$:測度空間

$$\mathcal{P}(X) = \{p : X \to \mathbb{R} \ ; \ p(x) > 0, \ \int_X p(x)dx = 1\}$$

:X 上の正値確率密度全体の空間

$\Xi \subset \mathbb{R}^n$: openでパラメータ付けられた確率分布の集合

$$S = \{p_\xi = p(x;\xi) \in \mathcal{P}(X) \ ; \ \xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \Xi\}$$

を**統計モデル**と呼ぶ。

Fisher 計量

$S=\{p_\xi ; \xi\in\Xi\}$ に対し　$l_\xi := \log p_\xi$　とおく。

$$g_{ij}(\xi) := E_\xi[\partial_i l_\xi \ \partial_j l_\xi] = \int_X (\partial_i l_\xi)(\partial_j l_\xi) p_\xi dx$$
$$= -E[\partial_i \partial_j l_\xi]$$

により定まる行列 $g=[g_{ij}]$ を **Fisher 情報行列**と呼ぶ。

さらに g が正定値のとき **Fisher 計量**と呼ぶ。

α 接続

$\Gamma^{(0)}_{ij,k}$: Fisher 計量 g の Levi-Civita 接続の.

$$T_{ijk} := E_\xi[\partial_i l_\xi \partial_j l_\xi \partial_k l_\xi], \quad \Gamma^{(\alpha)}_{ij,k} := \Gamma^{(0)}_{ij,k} - \frac{\alpha}{2} T_{ijk}$$

に対し

$$g(\nabla^{(\alpha)}_{\partial_i} \partial_j, \partial_k) = \Gamma^{(\alpha)}_{ij,k}$$

で定まる $\nabla^{(\alpha)}$ を**α 接続**と呼ぶ。

$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S)$ に対し

$$Zg(X,Y) = g(\nabla^{(\alpha)}_Z X, Y) + g(X, \nabla^{(-\alpha)}_Z Y)$$

が成り立つ。

統計多様体

統計モデル S ⇒ $\begin{cases} \text{Fisher 計量 } g \\ \alpha \text{ 接続 } \nabla^{(\alpha)} \end{cases}$

(S, g, ∇) 統計多様体

$\Leftrightarrow \quad T^{\nabla} = 0 \ \& \ \nabla g \in \mathrm{Sym}^3$

$\Leftrightarrow \quad T^{\nabla} = 0 = T^{\nabla^*}$ 　但し

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla^*_Z Y)$$

注:

・元々は Lauritzen (1987) による。

・Hông Vân Lê (2007) により統計多様体は統計モデル。

双対平坦性

Lemma

(S,g):Riemann, ∇ : affine connection

∇^* $\left(Zg(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla^*_Z Y) \right)$

に対し

(1) $(\nabla^*)^* = \nabla$,

$$\nabla^* = \nabla \;\Leftrightarrow\; \nabla g = 0 \text{ (Levi-Civita)}$$

(2) $\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ki,j} + \Gamma^*_{kj,i}$

(3) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle Z, R^*(X,Y)W\rangle$

特に $\boxed{R = 0 \;\Leftrightarrow\; R^* = 0}$

双対平坦空間

統計多様体 (S, g, ∇) は $R^{\nabla}=0$

のとき**双対平坦空間**と呼ばれる。

Corollary

統計モデル (S, g) に対し

(1) $(\nabla^{(\alpha)})^{*}=\nabla^{(-\alpha)}$

(2) S が指数型分布族なら

$\nabla^{(1)}$ と $\nabla^{(-1)}$ は平坦かつ捩れなし,

i.e., $(S, g, \nabla^{(e)}, \nabla^{(m)})$ は双対平坦空間

双対平坦座標系

双対平坦空間 (S, g, ∇, ∇^*) に対し

(1) $^\exists(\theta^1, \ldots, \theta^n)$: ∇-アフィン座標系
$(\eta_1, \ldots, \eta_n)$: ∇^*-アフィン座標系

s.t.

$$g\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}, \frac{\partial}{\partial\eta_j}\right) = \delta^i_j$$

(2) $$d\psi = \eta_i d\theta^i,\ d\varphi = \theta^i d\eta_i$$

を満たす $\psi, \varphi : S \to \mathbb{R}$ が存在。

このとき

$$\varphi + \psi = \theta^i \eta_i$$:Legendre 変換

Canonical divergence

双対平坦空間 (S, g, ∇, ∇^*) に対し

$D : S \times S \to \mathbb{R}$

$$D(p, q) := \varphi(p) + \psi(q) - \eta_i(p)\theta^i(q)$$

を **canonical divergence** と呼ぶ。

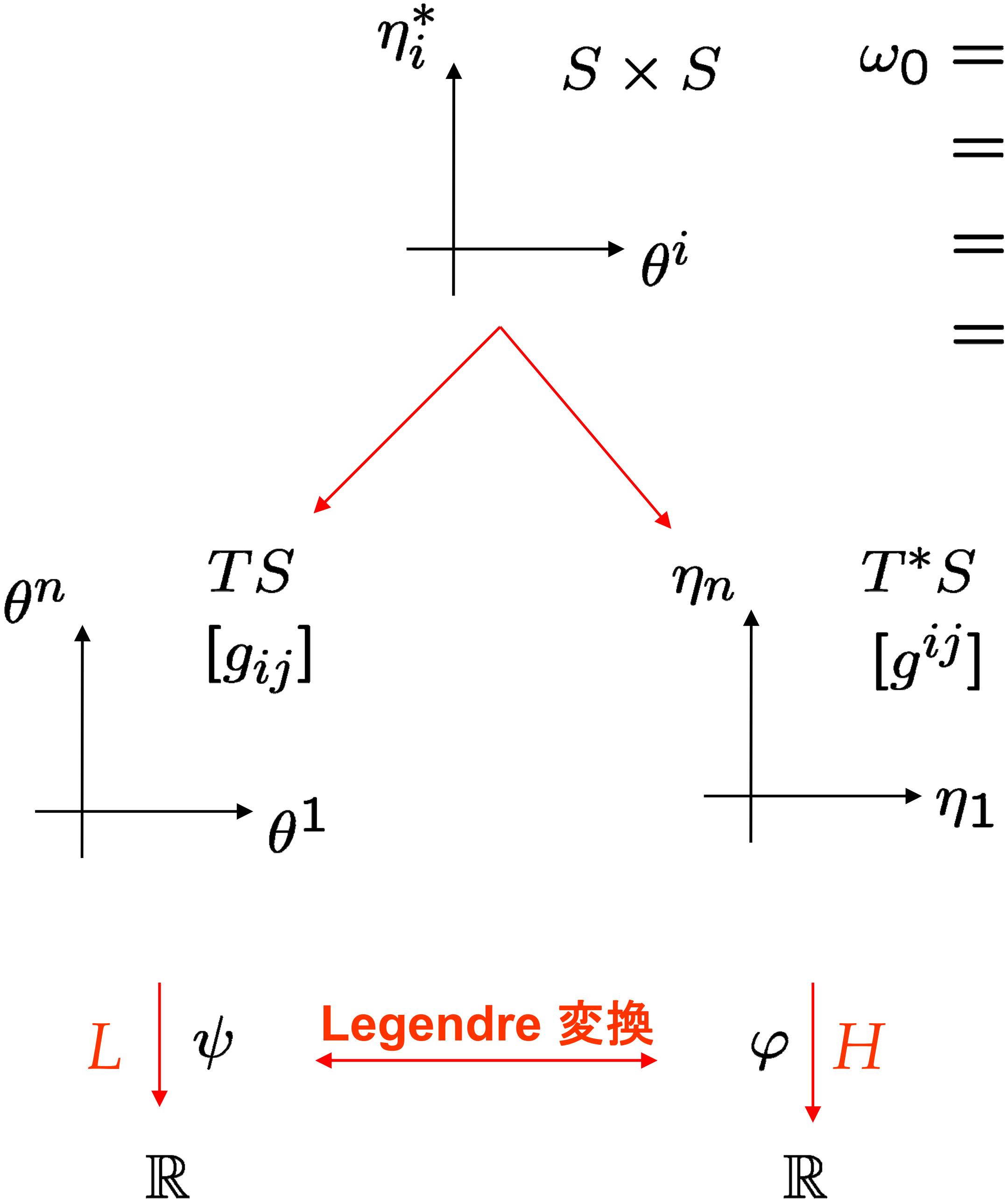
注意:

◎ $D(p\|q) + D(q\|r) - D(p\|r) = \sum(\eta_i(p) - \eta_i(q))(\theta^i(r) - \theta^i(q))$.

◎ $D(p\|q)$ は∇^*に関するもの。∇に対しては $D(q\|p)$.

◎ 指数型分布族の場合、相対エントロピー。

§３ 双対平坦空間の力学



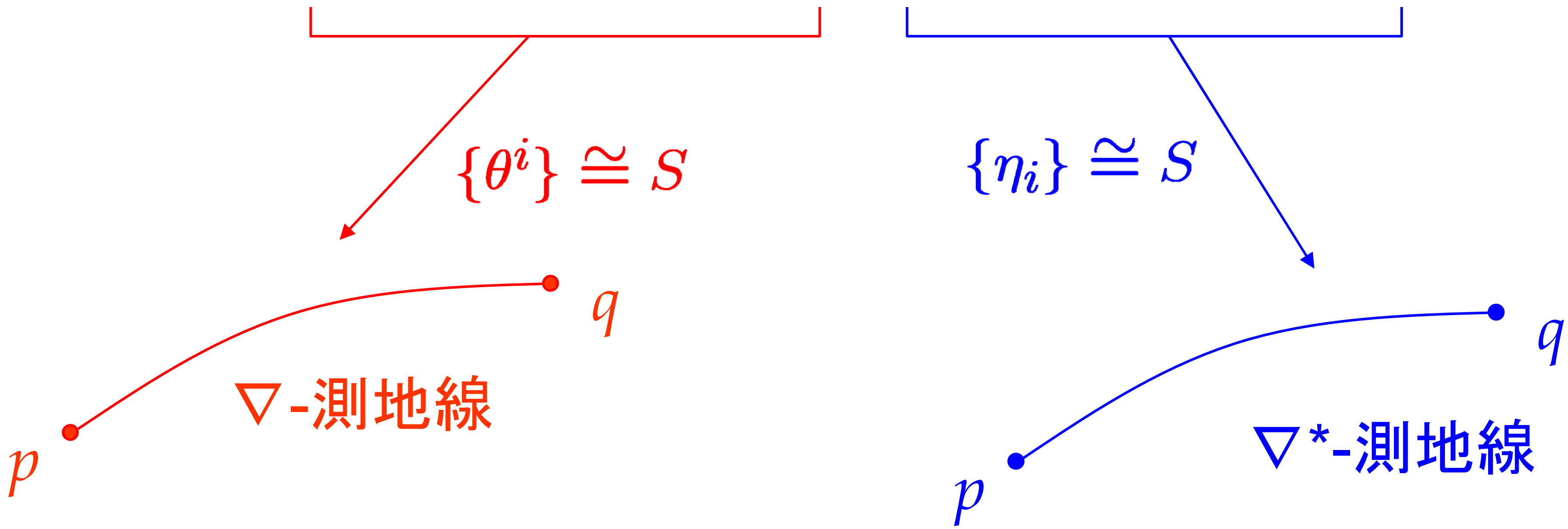
$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= -d\eta_i^* \wedge d\theta^i \\
&= -g_{ij}^* d\theta^{*i} \wedge d\theta^j \\
&= -g_{ik}^* g^{kj} d\theta^{*i} \wedge d\eta_j \\
&= -g^{ij} d\eta_i^* \wedge d\eta_j
\end{aligned}
$$

can. div. $D : S \times S \to \mathbb{R}$

$$D(p,q) := \varphi^*(p) + \psi(q) - \eta_i^*(p)\theta^i(q)$$

の Hamilton ベクトル場は

$$X_D = (\theta^{*i}(p) - \theta^i(q))\frac{\partial}{\partial \theta^i} + (\eta_i^*(p) - \eta_i(q))\frac{\partial}{\partial \eta_i^*}$$



Maupertuis の最小作用の原理

can. div. と sympl.構造

$D: S\times S \to \mathbb{R}$: can.div.

$d_1 D: S\times S \to T^*S$ を $(\xi,\xi') \mapsto (\xi, d_1 D)$ で定義。

但し$d_1 D := \frac{\partial D}{\partial \xi_i} d\xi_i.$

$S\times S$ 上の2形式を

$$\omega(\xi,\xi') := (d_1 D)^*(-d\theta_0) = \frac{\partial D}{\partial \xi_i \partial \xi'_j} d\xi_i \wedge d\xi'_j.$$

で定めるとこれは sympl. 形式。

但し $-d\theta_0$ は T^*S の正準 sympl. 構造。

これは先に定めた ω_0 と(実質的に)同じ。

§4 統計多様体と sympl. 構造

(M, g): Riemann

J: almost complex structure

$J^* : TM \to TM$ を $g(JX, Y) = -g(X, J^*Y)$ で定義。

① $(J^*)^2 = -I,\ (J^*)^* = J$

② $g(JX, J^*Y) = g(X, Y)$

③ $g(JX, JY) = g(X, Y) \ \Leftrightarrow\ J = J^*$

④ (M, g, ∇) :統計多様体

$$\Rightarrow\ g((\nabla_Z J)X, Y) = -g(X, (\nabla^*_Z J^*)Y)$$

命題

(1)

(M, g, ∇) :統計多様体,

J: 概複素構造 s.t. $g(JX, JY) = g(X, Y)$

- $\nabla^* = \nabla - J(\nabla J)$
- $(\nabla_X J)Y = (\nabla_Y J)X$

$\Rightarrow \omega(X, Y) := g(X, JY)$ に対し $d\omega = 0$, $\nabla\omega = 0$.

(2)

(M, ω) : sympl., ∇ : sympl. 接続(捩無、ωを保つ)

J: ωと両立する概複素構造

$\Rightarrow$ (i) $\nabla^* = \nabla - J(\nabla J)$

(ii) $(\nabla_X J)Y = (\nabla_Y J)X$ $\Leftrightarrow$ (S, g, ∇) は統計多様体

almost Kähler

sympl. conn.

$$(M, g, J, \omega, \nabla, \nabla^*)$$ を **SS manifold** と呼ぶことにしたい。

statistic manifold

Fact.

$$\begin{cases} \nabla\omega = 0 \\ \nabla^* = \nabla - J(\nabla J) \end{cases}$$

$\Rightarrow \ \nabla^*\omega = 0$ i.e. ∇^* も sympl. 接続

双対平坦空間の場合

$(M, g, J, \omega, \nabla, \nabla^*)$: SS manifold

$R^{\nabla}=0$ なら

$(\theta^1, \dots, \theta^{2n})$: ∇-アフィン座標系
$(\eta_1, \dots, \eta_{2n})$: ∇^*-アフィン座標系

は Darboux 座標系と取れる。

即ち

$$\omega = d\eta_1 \wedge d\eta_{n+1} + \cdots + d\eta_n \wedge d\eta_{2n}$$

$$\omega = d\theta^1 \wedge d\theta^{n+1} + \cdots + d\theta^n \wedge d\theta^{2n}$$

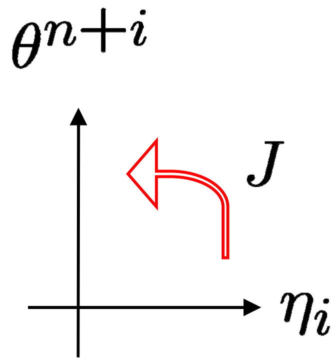
双対平坦 Darboux 座標系

$(\theta^1, \ldots, \theta^{2n})$: ∇-アフィン座標系

$(\eta_1, \ldots, \eta_{2n})$: ∇^*-アフィン座標系

に対し

$$J \frac{\partial}{\partial \eta_i} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta^{n+i}} & (1 \leq i \leq n) \\ -\frac{\partial}{\partial \theta^{i-n}} & (n+1 \leq i \leq 2n) \end{cases}$$



注:

$$J \frac{\partial}{\partial \theta^i} \neq \frac{\partial}{\partial \theta^{n+i}}$$

定理

(i) $(S, g_S, \nabla^S, \nabla^{S*})$:dually flat

$\Rightarrow$ ${}^{\exists}\omega$: sympl. on $S \times S$ induced from D

(locally)

(ii) $(M, g, J, \omega, \nabla, \nabla^*)$: (dually) flat SS manifold

$\Rightarrow$ ${}^{\exists}(S, g_S, \nabla^S, \nabla^{S*})$:dually flat s.t. $M \cong T^*S$

(locally)

§5 無限次元の場合

(i) $\mathcal{E}(p)$: 極大指数型モデル
（確率空間上の確率密度全体の連結成分）

（by Cena-Pistone,…）

(ii) $\mathcal{P}_k$:コンパクト Riemann 多様体上の可微分確率密度全体

（by Friedrich, Shishido,...）

上の sympl. 構造について。

無限次元 sympl 構造

E : Banach sp., E^* : dual

ω : skew-symm. bilinear form on E

$\omega^\flat : E \to E^*$

定義:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{(i) } \omega : \text{weak sympl.} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \omega^\flat : \text{inj.} \\ \text{(ii) } \omega : \text{strong sympl.} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \omega^\flat : \text{iso.} \end{array}}$$

（多様体上では $d\omega=0$ を追加）

注:

(1) ω: strong sympl. $\Rightarrow$ $E \simeq E^*$, E : reflexive

(2) E : finite dim. $\Rightarrow$ weak＝strong

例:

B : Banach sp.,

$E := B \times B^*$

$$\omega((u,v),(u',v')) = (v',u) - (v,u')$$

$$u, u' \in B,\ v, v' \in B^*$$

は weak sympl.

このとき

(1) $\omega^\flat : B \times B^* \to B^* \times B^{**}$

$$(u,v) \mapsto (v,u)$$

(2) ω strong sympl. $\Leftrightarrow$ B reflexive

極大指数型モデル

(Ω, χ, μ) :確率空間

$\mathcal{M} := \{p \,;\, p > 0 \ \ \mu - \text{a.s.}, \ \int_X p \, d\mu = 1\}$:確率密度全体

極大指数型モデル

$$\mathcal{E}(p) = \{e^{u - K_p(u)} p \,;\, u \in L^{\Phi_1}(p), \ E_p[u] = 0, \ K_p(u) < \infty\}$$

can. div. D により $\mathcal{E}(p) \times \mathcal{E}(p)$ 上に弱 sympl.構造が入る:

$(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in T_{p_1}\mathcal{E}(p) \times T_{p_2}\mathcal{E}(p)$ に対し

$$\omega((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = -E_{p_1}[v_1 w_2] + E_{p_1}[w_1 v_2]$$

（定理 (i) に対応）

Friedrich, Shishido の sympl. 構造

(X^n, h) :cpt. ori. Riemann 多様体

dV_h s.t. $\int_X dV_h = 1$

$$\mathcal{P}_k = \{\mu = f dV_h \; ; \; f \in L^2_k(X), \; f > 0, \; \int_X \mu = 1\}$$

:Hilbert 多様体 $\left(\text{モデル空間 } H = \{u \in L^2_k \; ; \; \int_X u dV_h = 0\}\right)$

Fisher 計量

$$g(\sigma_1, \sigma_2) = \int_X \frac{d\sigma_1}{d\mu}\frac{d\sigma_2}{d\mu}\mu \qquad (\mu \in \mathcal{P}_k, \; \sigma_1, \sigma_2 \in T_\mu \mathcal{P}_k)$$

sympl. 構造

W : div.-free v.f. on (X, h)

$\Phi : T_\mu \mathcal{P}_{k+1} \to T_\mu \mathcal{P}_k$ s.t. $\Phi(\sigma) = W(\frac{d\sigma}{d\mu}) dV_h$

$$\Rightarrow \ \Omega(\sigma_1, \sigma_2) = g(\sigma_1, \Phi(\sigma_2)) = \int_X \frac{d\sigma_1}{d\mu} W\left(\frac{d\sigma_2}{d\mu}\right) dV_h$$

Fact

(i) Ωは閉形式

(ii) *W* の積分曲線が X で稠密⇒Ωは(弱)非退化

(iii) *W* が正則第一積分を持たない ⇔ Ω:強非退化

注: f が *W* の正則第一積分 ⇔ ・Wf=0 ・∀開集合上 f は定数でない

例：

$X = S^1,\ dV_h = \frac{1}{2\pi} dt$
$k \geq 2$

$\Rightarrow \mathcal{P}_k = \mathrm{Diff}_{k+1}(S^1)/S^1$ は強 sympl. 構造を許容する。

・この構造に対し Lagrangian $\mathcal{L}$ が存在；

$$\mathcal{P}_k \cong T^*\mathcal{L} \text{ (locally)}$$

（定理 (ii) に対応）

文献

[1] A. Cena and G. Pistone :
Exponential statistical manifold, Annals of the Institute of Statistical Mathematics 59 (1) (2007), 27--56.

[2] O.E. Barndorff-Nielsen and P.E. Jupp : Statistics, yokes and symplectic geometry, Annales de la facultè des sciences de Toulouse Sèr. 6, 6 no. 3 (1997), p. 389-427.

[3] T. Friedrich :
Die Fisher-Information und symplektische Strukturen, Math. Nachr. 153 (1991), 273--296.

[4] Y. Nakamura :
Completely integrable gradient systems on the manifolds of Gaussian and multinomial distributions, Japan J. Indust. Appl. Math. 10 (1993), 179--189.

[5] Y. Shishido :
Strong symplectic structures on spaces of probability measures with positive density function, Proc. Japan Acad., 81, Ser. A (2005), 134--136.

[6] Hông Vân Lê :
Monotone invariants and embeddings of statistical manifolds, Advances in deterministic and stochastic analysis. World Scientific : Springer - (Chung, N.; Ciarlet, P.; Lax, P.; Mumford, D.; Phong, D.), (2007), 231-254.