Tsallis entropy と Wasserstein 幾何

確率測度空間＋距離関数
（≠ Fisher 計量）

東北大学　高津 飛鳥

（太田慎一氏との共同研究）

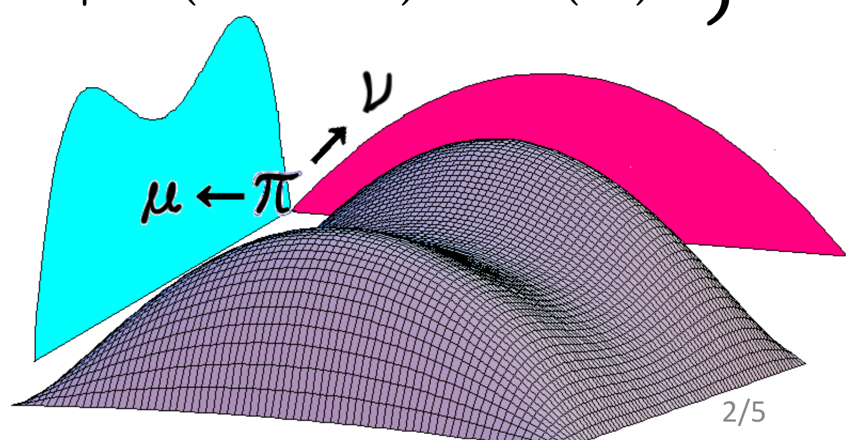
Wasserstein 空間 $(\mathcal{P}_2(X), W_2)$

$$\mathcal{P}_2(X) = \left\{ \mu : X \text{ 上の確率測度} \;\middle|\; \int_X \mathrm{d}({}^{\exists}x_0, x)^2 \mu(dx) < \infty \right\}$$

$$W_2(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi_{\mu,\nu}} \left(\int_{X \times X} \mathrm{d}(x, y)^2 \pi(dx, dy) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Pi_{\mu,\nu} = \left\{ \pi : X \times X \text{ 上の確率測度} \;\middle|\; \begin{array}{l} \pi(A \times X) = \mu(A) \\ \pi(X \times A) = \nu(A) \end{array} \right\}$$

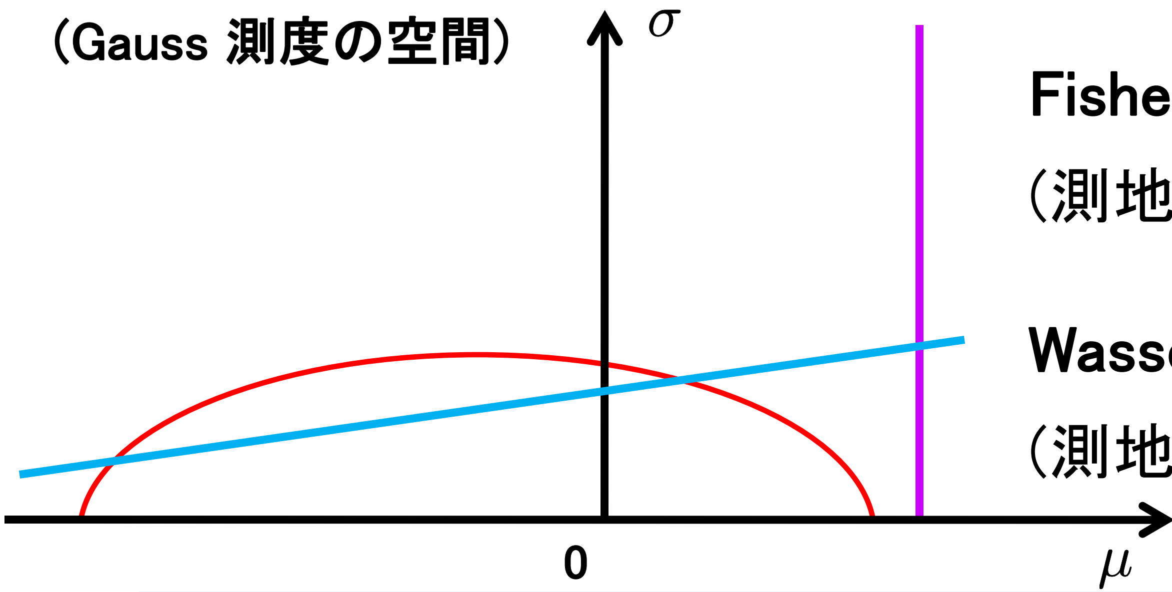
(ex. $\mu \otimes \nu$: 直積測度)



Fisher 計量との違い

$$\mathcal{N}^1 = \left\{ N(\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \ : \ \begin{matrix} \text{平均} & \mu \in \mathbb{R} \\ \text{分散} & \sigma > 0 \end{matrix} \right\}$$

(Gauss 測度の空間)



Fisher ≡双曲空間 $\mathbb{H}^2\left(1/\sqrt{2}\right)$

(測地線：楕円, μ =a)

Wasserstein ≡ユークリッド

(測地線：直線, μ =a)

$\mathcal{N}^d(q) \overset{W_2}{\equiv} \mathcal{N}^d$: 錐構造(正曲率), 全測地的 .

情報幾何との関連 …Talagrand 不等式 (Otto-Villani)

$$\nu = \exp(-\Psi) vol, \ \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\Psi \geq \lambda > 0$$

$$\Rightarrow W_2(\mu, \nu) \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda} H(\mu|\nu)} \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_2^{ac}(M)$$

$$\Rightarrow \nu(A_r) \geq 1 - \exp\left(-cr^2\right) \quad \forall A \subset M \ \text{s.t.}\ \nu(A) \geq \tfrac{1}{2}, \ \forall r > 0$$

（測度の集中）

相対 entropy
"="（距離）^{2}

$$H(\mu|\nu) = \int_M (e(f) - e(g) - e'(f-g))\, d\, vol$$

$$\mu = f\, vol, \ \nu = g\, vol, \quad e(x) = x \ln x$$

q-analogy

$$\exp_q(t) = (1+(1-q)t)^{\frac{1}{1-q}} \xrightarrow{q \searrow 1} \exp(t)$$

$$\nu = \exp_q(-\Psi) vol, \ \ \mathrm{Ric} > 0, \ \ \mathrm{Hess}\Psi \geq \lambda > 0$$

$$\Rightarrow W_2(\mu, \nu) \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda} H_m(\mu|\nu)} \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_2^{ac}(M)$$

$$\Rightarrow \nu(A_r) \geq 1 - C \exp_q\left(-cr^2\right) \quad \forall r > 0$$ (測度の集中)

Bregman divergence "=" (距離)^2

$$H_m(\mu|\nu) = \frac{1}{m} \int_M [e_m(f) - e_m(g) - e'_m(f-g)] \, d\, vol$$

$$e_m(x) = \frac{x^m - x}{m-1} \xrightarrow{m \nearrow 1} e(x) = x \ln x \quad \left[m + q = 2 \right]$$