球面への調和写像に付随する tt* 束

黒須早苗 (東京理科大・理)

本資料は守屋克洋氏 (筑波大学) との共同研究に基く結果の報告であり，東北学院大学・多賀城情報幾何学研究集会「情報幾何学と統計多様体上の一般化共形構造の周辺」での講演内容に加筆，修正を行いまとめたものである．

§0. 導入.

tt* とは topological - antitopological fusion の略語であり (“*” は “anti” にあたる)，[4] において，Cecotti, Vafa により導入された．ここで,「topological」とは「位相的な」ではなく,「正則的 (=holomorphic)」に相当する概念であると考えられる．つまり大雑把にいって tt* 構造とは正則なデータと反正則なデータから構成される構造であるといえる．

tt* 構造の幾何学は可積分系，特異点論，多重調和写像理論，スペシャル複素多様体の幾何学，アファインはめ込みの幾何学等と深い関連を持ち，Dubrovin ([5]), Cecotti, C. Vafa ([4]), Cortes ([2]), Schäfer ([7], [8], [9], [10]), Hertling ([6]) らによりそれぞれの角度から研究が進められている．

特にある種の (擬) リーマン対称空間への多重調和写像と計量 tt* 束やシンプレクティック tt* 束との関係については Schäfer により研究が行われており，単連結複素多様体から $GL(r,\mathbb{R})/O(p,q)$ または $SL(r,\mathbb{R})/SO(p,q)$ への多重調和写像から計量 tt* 束が，$GL(2r,\mathbb{R})/Sp(2r)$ への多重調和写像からシンプレクティック tt* 束が構成されることが知られている ([7], [8], [9], [10] 等).

また，四元数を用いた定式化の下で，リーマン面から 2 次元球面への調和写像から tt* 構造が構成されている ([3])．平均曲率一定曲面のガウス写像は 2 次元球面への調和写像であるので，これにより平均曲率一定曲面から tt* 束が構成できることがわかる．

ここではクリフォード代数を用いて球面への調和写像から tt* 束を構成する方法について紹介する．

§1. 記号と定義.

E を概複素多様体 (M,J) 上の (実) ベクトル束とする．D を E 上の接続, $S\in A^1(\mathrm{End}(E))$ $(S_X\xi, X\in\Gamma(TM),\xi\in\Gamma(E))$ に対して，接続の 1 径数族 D^θ $(\theta\in\mathbb{R})$ を $D^\theta := D+\cos\theta S+\sin\theta S_J$ で定義する．また，R^D, R^θ で D, D^θ の曲率テンソルをそれぞれ表す．以下では特に断らない限り，$\xi,\eta\in\Gamma(E)$, $X,Y,Z,W\in\Gamma(TM)$ とする．

定義 1.1 ・ (E,D,S) が **tt* 束**とは $R^\theta=0$, $\theta\in\mathbb{R}$ (tt* 方程式) が成り立つときをいう．
・(E,D,S,g) が**計量 tt* 束** とは (E,D,S) が tt* 束であり，E のファイバー計量 g が $Dg=0$, $g(S_X\xi,\eta)=g(\xi,S_X\eta)$ を満たすときをいう．
・ (E,D,S,g) が**ユニモジュラ計量 tt* 束**とは (E,D,S,g) が計量 tt* 束で $\mathrm{tr}S_X=0$ が成り立つときをいう．

注意 1 tt* 構造は概複素多様体上のベクトル束に対して定義可能である．但し，以下では複素多様体上のベクトル束のみ扱う．

命題 1.2 ([8]) (E,D,S) が *tt** 束である為の必要十分条件は次の 4 つの式が成り立つことである．

$$R^D_{X,Y}+[S_X,S_Y]=0, \tag{1.1}$$
$$D_XS_Y-S_YD_X-D_YS_X+S_XD_Y-S_{[X,Y]}=0, \tag{1.2}$$
$$D_XS_{JY}-S_{JY}D_X-D_YS_{JX}+S_{JX}D_Y-S_{J[X,Y]}=0, \tag{1.3}$$
$$[S_X,S_Y]=[S_{JX},S_{JY}]. \tag{1.4}$$

M 上の捩率ゼロの複素アファイン接続を固定すると，(1.2), (1.3) 式はそれぞれ (1.2’), (1.3’) と同値になる．

$$d^DS=0, \tag{1.2’}$$
$$d^DS_J=0. \tag{1.3’}$$

注意 2 $\dim_{\mathbb{R}} M = 2$ なら (1.4) は常に成り立つ.

次に，tt* 束の例として，スペシャル複素多様体，ヘッセ多様体の接束と調和束を挙げる．
例 1. スペシャル複素多様体.

定義 1.3 ・(M, J, ∇) が **スペシャル複素多様体**とは (M, J) が複素多様体であり，∇ が $d^{\nabla} J = 0$ を満たす平坦なアファイン接続であるときをいう.
・(M, J, g, ∇) が**スペシャルケーラー多様体**とは (M, J, g) が (擬) ケーラー多様体であり，(M, J, ∇) が $\nabla\omega = 0, (\omega := g(J\cdot, \cdot))$ を満たすスペシャル複素多様体であるときをいう.

次のことが知られている.

命題 1.4 (M, J, g, ∇) がスペシャルケーラー多様体であることの必要十分条件は次の 3 つが成り立つことである.

(1) (M, ∇, g) はヘッセ多様体である,
(2) $g(JX, JY) = g(X, Y)$ が成り立つ,
(3) $\nabla^* = J \circ \nabla \circ J^{-1}$，但し ∇^* は ∇ の g に関する共役接続を表す.

$$S_X Y := \frac{1}{2} J(\nabla_X J)Y$$

とおくと，次が成り立つ.

命題 1.5 ・(M, J, ∇) がスペシャル複素多様体なら，$(TM, D := \nabla - S, S)$ は *tt** 束で $DJ = 0$ が成り立つ.
・(M, J, g, ∇) が スペシャルケーラー多様体のとき，次が成り立つ.
(1) $(TM, D = \nabla - S, S, g)$ は ユニモジュラ 計量 tt* 束,
(2) $D := \nabla - S$ は g のレビ・チビタ接続,
(3) (∇g) は対称で (M, ∇, g) は統計多様体の構造を持つ,
(4) $\nabla - 2S$ が ∇ の g に関する共役接続.

Proof. (M, J, ∇) をスペシャル複素多様体とする．$d^{\nabla} J = 0$ より

$$S_X Y = S_Y X, \quad S_{JX} Y = S_X JY = -JS_X Y$$

が成り立つ．また，D の定義より次が成り立つ.

$$(D_X J)Y = D_X JY - JD_X Y = (\nabla_X - S_X)JY - J(\nabla_X Y - S_X Y) = \nabla_X JY - J\nabla_X Y + 2JS_X Y = 0.$$

これらと ∇ が平坦なことより

$$(1.1): \quad R^D_{X,Y} Z + S_X S_Y Z - S_Y S_X Z = \frac{1}{2}(R^{\nabla}_{X,Y} Z - JR^{\nabla}_{X,Y} JZ) = 0,$$

$$(1.2): \quad D_X S_Y Z - S_Y D_X Z - D_Y S_X Z + S_X D_Y Z - S_{[X,Y]} Z = \frac{1}{2}(R^{\nabla}_{X,Y} Z + JR^{\nabla}_{X,Y} JZ) = 0,$$

$$(1.3): \quad D_X S_{JY} Z - S_{JY} D_X Z - D_Y S_{JX} Z + S_{JX} D_Y Z - S_{J[X,Y]} Z = -\frac{1}{2} J(R^{\nabla}_{X,Y} Z + JR^{\nabla}_{X,Y} JZ) = 0,$$

$$(1.4): \quad S_{JX} S_{JY} = JS_X JS_Y = -J^2 S_X S_Y = S_X S_Y \text{ より } [S_{JX}, S_{JY}] = [S_X, S_Y].$$

よって (TM, D, S) は tt* 束である.

次に (M, J, g, ∇) をスペシャルケーラー多様体とする．(M, J, ∇) はスペシャル複素多様体より，$(TM, D := \nabla - S, S)$ は tt* 束となる．ω を $\omega(X, Y) := g(JX, Y)$ で定義するとき，$\nabla\omega = 0$ より,

$$(\nabla_X g)(JY, JZ) = (\nabla_X g)(Y, Z) = 2g(S_X Y, Z)$$

が成り立つので，$g(S_XY,Z)=g(Y,S_XZ)$ が成り立ち，

$$0=(\nabla_X\omega)(Y,Z)=(D_Xg)(JY,Z)-g(JS_XY,Z)-g(JY,S_XZ)=(D_Xg)(JY,Z)$$

より，D はレビ・チビタ接続であり，(TM,D,S,g) は計量 tt* 束である．

次に $x\in M$ を固定して，T_xM の $e_{m+j}=Je_j$ $(j=1,\ldots,m)$ を満たす正規直交基底 $e_1,\ldots,e_{2m}$ に対して，

$$\mathrm{tr}S_X=\sum_{i=1}^{2m}g(S_Xe_i,e_i)=\sum_{j=1}^{m}\{g(S_Xe_j,e_j)+g(S_XJe_j,Je_j)\}=\sum_{j=1}^{m}\{g(S_Xe_j,e_j)-g(JS_Xe_j,Je_j)\}=0$$

よりユニモジュラである．

更に

$$\begin{aligned}(\nabla_Xg)(Y,Z)&=Xg(Y,Z)-g(\nabla_XY,Z)-g(Y,\nabla_XZ)\\&=Xg(Y,Z)-g((D_X+S_X)Y,Z)-g(Y,(D_X+S_X)Z)\\&=(D_Xg)(Y,Z)-g(S_XY,Z)-g(Y,S_XZ)=-g(S_XY,Z)-g(Y,S_XZ)=-2g(S_XY,Z)\end{aligned}$$

より，(∇g) は対称であるので，(M,∇,g) は統計多様体の構造を持ち，∇ の g に関する共役接続 ∇^* は $\nabla^*=\nabla-2S=D-S$ で与えられる． □

例 2. ヘッセ多様体の接束.

ここでは，[1] の結果を紹介する．

(M,g,∇) をヘッセ多様体とし，3 次形式 (差テンソル) (∇g) が ∇ 平行であると仮定する．

$T(TM)$ を ∇ から決まる水平方向 $\mathcal{H}$ と垂直方向 $\mathcal{V}$ に分解する．つまり，

$$T(TM)=\mathcal{H}\oplus\mathcal{V}.$$

$\pi:TM\to M$ を射影とすると $\xi\in TM$ に対して，

$$T_\xi(TM)=\mathcal{H}_\xi\oplus\mathcal{V}_\xi\cong T_{\pi(\xi)}M\oplus T_{\pi(\xi)}M$$

が成り立つ．ここで $\cong$ は同一視を表す．

$J:T(TM)\to T(TM)$ を各点 $\xi\in TM$ で

$$J_\xi:T_\xi(TM)=\mathcal{H}_\xi\oplus\mathcal{V}_\xi\ni(u,v)\mapsto(-v,u)\in T_\xi(TM)$$

により定義する．また，$T(TM)$ 上の計量 g^N を $(u_k,v_k)\in\mathcal{H}_\xi\oplus\mathcal{V}_\xi$, $k=1,2$ に対して

$$g^N_\xi((u_1,v_1),(u_2,v_2)):=g_{\pi(\xi)}(u_1,u_2)+g_{\pi(\xi)}(v_1,v_2)$$

で定義する．このとき，(TM,g^N,J) はケーラー多様体になることが確認できる．D を g^N のレビ・チビタ接続とする．また，ヘッセ多様体 (M,g,∇) の差テンソルを $\hat{F}:=\hat{\nabla}-\nabla$ とおくとき，$T(TM)$ 上の $(1,2)$-テンソル場 F を $(X,Y),(Z,W)\in\Gamma(T(TM))$ に対して，次で定義する．

$$F_{(X,Y)}(Z,W):=((\hat{F}_XZ)-(\hat{F}_YW),-(\hat{F}_XW)-(\hat{F}_YZ))$$

このとき，次が成り立つ．

命題 1.6 ([1]) $(TM,g^N,J,D-F)$ はスペシャルケーラー多様体である．

従って例 1 より $T(TM)$ 上にはユニモジュラ計量 tt* 束の構造が入る．

例 3. 調和束.

K を (M,J) 上の C^∞ 複素ベクトル束，D を K の接続，$C \in A^{1,0}(\mathrm{End}(K)), \widetilde{C} \in A^{0,1}(\mathrm{End}(K))$ とし，g を K のファイバー計量とする．

定義 1.7 $(K,D,C,\widetilde{C},g)$ が**調和束 (harmonic bundle)** とは $D^z := D + zC + \frac{1}{z}\widetilde{C},\ z \in S^1 \subset \mathbb{C}$ が平坦で，D が g の計量接続であり，$g(C_X\xi,\eta) = g(\xi,\widetilde{C}_{\overline{X}}\eta),\ X \in \Gamma(T^{1,0}M),\ \xi,\ \eta \in \Gamma(K)$ が成り立つときをいう．

命題 1.8 ([8]) $(K,D,C,\widetilde{C},g)$ が調和束ならば，$(K,D,S := C+\widetilde{C}, g := \mathrm{Re}g)$ は計量 tt^* 束である．

Proof. 直接計算より確認できる． □

§2. 先行結果.

先行結果１. ([3] 等)

$\mathbb{H}$ を四元数空間とし，$S^2 := \{ai+bj+ck \mid a^2+b^2+c^2 = 1, a,b,c \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Im}\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$ とする．$N : M \to S^2 \subset \mathrm{Im}\mathbb{H}$ をリーマン面 M からの写像とするとき，次が成り立つ．

命題 2.9 $E := M \times \mathrm{Im}\mathbb{H} \cong M \times \mathbb{R}^3$ に対し $S \in A^1(\mathrm{End}(E))$ を，

$$S_X := \frac{1}{4}(*dN + NdN)(X) := \frac{1}{4}(dN(JX) + NdN(X)) \in \mathrm{End}(E)$$

で定義するとき，$(E, D := d-S, S)$ が tt^* 束となることの必要十分条件は N が調和写像であることである．

$f : M \to \mathrm{Im}\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$ を平均曲率一定 (CMC) 曲面とすると，そのガウス写像 $N : M \to S^2 \subset \mathrm{Im}\mathbb{H}$ は調和写像であるので，次が成り立つ．

系 2.10 $E := M \times \mathrm{Im}\mathbb{H} \cong M \times \mathbb{R}^3$ に対し，$(E, D := d-S, S)$ が tt^* 束であることの必要十分条件は f が平均曲率一定曲面であることである．

実際 $\mathcal{H}$ を f の平均曲率ベクトルとすると，f が平均曲率一定曲面であることの同値条件は $H := N\overline{\mathcal{H}}$ が実定数であることであり，

$$2S_X = \overline{\mathcal{H}}df = -NHdf(X) = -HNdf(X) = -Hdf(JX)$$

が成り立つので $D := d-S$ に対し，次の 3 条件は同値である事がわかる．

$$d^D S_J = \iff dS_J = 0 \iff f : \mathrm{CMC}.$$

先行結果２. ([5], [7], [8] 等)

命題 2.11 ・(M,J) を単連結複素多様体，$f : M \to GL(r,\mathbb{R})/O(r,\mathbb{R})$ を多重調和写像とするとき，$\left(M \times \mathbb{R}^r, d-S, S := -\frac{1}{2}f^{-1}df, g(f\,\cdot\,,\cdot\,)\right)$ は計量 tt^* 束になる．

・(E,D,S,g) を複素多様体 (M,J) 上の計量 tt^* 束 ($\mathrm{rank}E = r$) とするとき，$f : M \to Sym(r) \to GL(r,\mathbb{R})/O(r,\mathbb{R})$ は多重調和写像になる．ここで，$\widetilde{f} : M \to Sym(r)$ は D^θ 平坦枠による計量 g の表現行列である．

§3. S^n への調和写像と tt* 束.

Cl_n を $\mathbb{R}$ 上のクリフォード代数，つまり，

$$Cl_n := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\{1\} \cup \{e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}\dots e_{i_k} \mid 1 \le i_1 < i_2 < \cdots \le n\}\}$$

に次の演算 (クリフォード積) をいれたものとする.

$$e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{ij},$$

但し $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底を表す.

注意 3 $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n \subset Cl_n$, $\dim Cl_n = 2^n$ であり，$Cl_n \cong \mathbb{R}^{2^n}$ と自然に同一視される.

$$S^{n-1} := \{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n \subset Cl_n$$

とおくと，$z \in S^{n-1} \subset Cl_n$ に対して，$zz = -1$ が成り立つ.

(M, J) をリーマン面，$N : M \to S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \subset Cl_n$ を写像，$H := M \times Cl_n \cong M \times \mathbb{R}^{2^n}$ を自明束とする.

$\alpha \in A^1(M)$ に対し，$* : A^1(M) \to A^1(M)$ を次で定義する.

$$*\alpha := \alpha \circ J.$$

次が主結果である.

命題 3.12 (1) $S := \dfrac{1}{4}(*dN + NdN) \in A^1(\mathrm{End}(H))$ に対して，$(H, D = d - S, S)$ が tt^* 束であるための必要十分条件は N が調和写像であることである.

(2) $A := \dfrac{1}{2}NdN \in A^1(\mathrm{End}(H))$ に対して，$(H, D = d - A, A)$ が tt^* 束であるための必要十分条件は N が調和写像であることである.

Proof. (1) 直接計算より，次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
d(*S) &= \frac{1}{4}d(-dN + N * dN) = \frac{1}{4}(dN \wedge *dN + Nd(*dN)),\\
dS &= \frac{1}{4}(dN \wedge dN + d(*dN)),\\
S \wedge S &= \frac{1}{16}(NdN \wedge NdN + *dN \wedge NdN + NdN \wedge *dN + *dN \wedge *dN).
\end{aligned}$$

よって次の条件が同値であることがわかる.

$$d(*S) = 0 \iff d(*dN) = NdN \wedge *dN \iff N \text{ は調和写像} \iff dS = 2S \wedge S.$$

$\dim_{\mathbb{R}} M = 2$ より (1.4) は成立.

$D := d - S$ とおくと，

$$\begin{aligned}
&(1.1): & R^D &= R^d - dS + S \wedge S = -dS + S \wedge S,\\
&(1.2'): & d^D S &= dS - 2S \wedge S,\\
&(1.3'): & d^D(*S)(X, Y) &= d(*S)(X, Y) - [S_X, S_{JY}] + [S_Y, S_{JX}]\\
&& &= d(*S)(X, Y) - [S_{JX}, S_{JJY}] + [S_Y, S_{JX}]\\
&& &= d(*S)(X, Y)
\end{aligned}$$

であることから $d^D(*S) = 0 \iff d(*S) = 0$ であるので、

$$(E, D, S) \text{ が tt}^* \text{ 束} \iff N \text{ が調和写像}$$

であることがわかる．

(2) A と D の定義より

$$dA = 2A \wedge A, \quad R^D = R^d - dA + A \wedge A$$

が成り立つので，

(1.1) : $\quad R^D = -dA + A \wedge A = -A \wedge A,$

(1.2'): $\quad d^D A = dA - 2A \wedge A = 0,$

(1.4) : $\quad \dim_{\mathbb{R}} M = 2$ より OK

であり，(1) と同様にして，

$$\text{(1.3')} \quad d(*A) = 0 \iff d(*dN) = NdN \wedge *dN \iff N \text{ は調和写像}$$

が成り立つので，主張がいえる．

□

注意 4 命題 3.12(1) で $n = 2$ とすると，$Cl_2 \cong \mathbb{R}^8$ より S^2 への調和写像から構成できる tt* 束は [3] で構成しているものとファイバーが異なる．また，命題 3.12(2) についても $S^n \neq GL(n,\mathbb{R})/O(n,\mathbb{R})$ より，命題 3.12 の構成はそれぞれ先行結果に類似しているが，先行結果を含まない．

参考文献

[1] D. V. Alekseevsky, V. Cortes, *Geometric construction for the r-Map: From affine special real to special Kähler manifolds.* Commun. Math. Phys. **291** (2009), 579–590.

[2] O. Baues, V. Cortes, *Realisation of special Kähler manifolds as parabolic spheres.* Asian J. Math. **7** (2003), 115–132.

[3] F. E. Buratall, D. Ferus, K. Leschke, F. Pedit, U. Pinkall, *Conformal geometry of surface in S^4 and Quaternions.* Lecture Note in Math. 1772.

[4] S. Cecotti, C. Vafa, *Topological-antitopological fusion.* Nuclear Phys. **B 367** (1991), 359–461.

[5] B. Dubrovin, *Geometry and integrability of topological-antitopological fusion.* Comm. Math. Phys. **152** (1993), 539–564.

[6] C. Hertling, *tt*-geometry, Frobenius manifolds, their connections, and the construction for singularities.* J. Reine Angew. Math. **555** (2003), 77–161.

[7] L. Schäfer, *tt*-Geometry and Pluriharmonic Maps.* Ann. Global. Anal. Geom. **28** (2005), 285–300.

[8] L. Schäfer, *Harmonic bundles, topological-antitopological fusion and the related pluriharmonic maps.* J. Geom. Phys. **56** (2006), 830–842.

[9] L. Schäfer, *tt*-geometry on the tangent bundle of an almost complex manifold.* J. Geom. Phys. **57** (2007), 999–1014.

[10] L. Schäfer, *A geometric construction of (para-)pluriharmonic maps into $GL(2r)/Sp(2r)$.* Balkan J. of Geom. and Appl. **13** (2008), 86–101.

黒須早苗

〒 162-8601　東京都新宿区神楽坂 1-3

東京理科大学理学部数学教室

email: kurosu@rs.kagu.tus.ac.jp