統計構造とシンプレクティック構造について（加筆版）

野田　知宣（大阪歯科大学）

1. 序

本稿では統計構造とシンプレクティック構造について考える。ここで云う統計構造とは統計モデル上の Riemann 計量と双対なアフィン接続の組の事であり、主に平坦性を仮定した双対平坦空間で考えるが、実質的には正規分布族もしくは有限集合上の確率分布の空間を対象とする。一方、シンプレクティック構造とは多様体上の非退化で可積分な微分２形式の事であるが、これは解析力学を一般化・抽象化した数学的枠組みである。統計モデル上の統計構造を幾何学的に考察する分野は情報幾何学と呼ばれ、アフィン微分幾何学の手法が使用されるが、シンプレクティック構造も相性が良い事を述べたい。情報幾何学に現れる空間（統計モデル）はトポロジカルには非常に単純なものであるが、分布の空間である事を考えると統計構造は（ほぼ）一意的に定まる。しかしながらそこにシンプレクティック構造を入れる事を考えた場合、多くのシンプレクティック構造を定める事が出来る。それらの中で統計構造と相性の良いものを探す事が第一の目標である。統計構造と相性の良いシンプレクティック構造がシンプレクティック幾何学においても良いものであれば有難いが、双対平坦空間に対して自然に定まるシンプレクティック構造は正準（シンプレクティック）構造であり、これは確かに良いものである。統計構造と正準構造、Hamilton 方程式との関係を以下で論じる。

因みにタイトルに「加筆版」とあるが、これは講演後に少し頭冷やした結果判明した内容を含むことを意味する。

2. 準備

本節では双対平坦空間とシンプレクティック多様体に関する定義や結果で必要なものを纏めておく（微分可能性については基本的に C^∞ 級とする）。詳細については、双対平坦空間に関しては長岡 [14], Amari-Nagaoka [4]（or [3]）, Eguchi [7], Matsuzoe [13] など、シンプレクティック多様体については Abraham-Marsden [1], Guillemin-Sternberg [11] などを参照の事。

2.1. 双対平坦空間とか. S を多様体、g を S 上の Riemann 計量、∇ をアフィン接続とする。$X, Y, Z \in \Gamma(TS)$ に対し

$$T^\nabla(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \quad R^\nabla(X,Y)Z = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z$$

で定められるテンソル場 T^∇, R^∇ を順に ∇ の捩率、曲率と呼ぶ。また ∇ に対し

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z)$$

を満たすアフィン接続 ∇^* が一意的に存在し、∇ の双対接続と呼ばれる。これらの準備のもと、次のように定める。

定義 2.1. $T^\nabla = 0 = T^{\nabla^*}$ が成立するとき (S, g, ∇, ∇^*) を統計多様体と呼ぶ。更に $R^\nabla = 0$ が成立するとき (S, g, ∇, ∇^*) を双対平坦空間と呼ぶ。

この定義において $T^\nabla = 0 = T^{\nabla^*}$ は $T^\nabla = 0$ かつ $\nabla g \in \mathrm{Sym}^3$ と同値。ここで Sym^3 は対称３テンソルの集合を表す。また $R^\nabla = 0$ は $R^{\nabla^*} = 0$ と同値である。

(S, g, ∇, ∇^*) を双対平坦空間とすると、次の３つのものが定まる：

①: ∇-アフィン座標系 $[\theta^i]$, ∇^*-アフィン座標系 $[\eta_j]$ で $g(\partial_i, \partial^j) = \delta_i^j$ を満たすものが存在する[1]。但し $\partial_i = \partial/\partial\theta^i$, $\partial^j = \partial/\partial\eta_j$.

②: S 上の函数 $\varphi(\eta)$, $\psi(\theta)$ で

$$\theta^i = \partial^i\varphi, \quad \eta_j = \partial_j\psi, \quad g_{ij} = \partial_j\eta_i, \quad g^{ij} = \partial^j\theta^i$$

を満たすものが存在する。ここで g_{ij}, g^{ij} はそれぞれ ∂_i, ∂^j に関する計量 g の成分。

③: $S \times S$ 上の函数である canonical divergence D が

$$D(p\|q) = \varphi(\eta(p)) + \psi(\theta(q)) - \eta_i(p)\theta^i(q)$$

で定まる。ここでは Amari-Nagaoka [4] に従い、これを ∇^* に関する divergence と呼ぶ事にする。∇ に関する divergence を $D'(p\|q) := D(q\|p)$ で定める（藤原 [9], Fujiwara-Amari [10] では逆に取っている）。指数型分布族の場合、canonical divergence は

$$D(p_1\|p_2) = \int p_1 \log \frac{p_1}{p_2} dx$$

となり、Kullback-Leibler divergence である。

双対平坦空間に対して、アフィン座標系とポテンシャル函数が２つずつ定まり、それらを使って divergence が２つ作られた。逆に、多様体 S 上に凸函数（ポテンシャル）U があれば、計量 g_U, 双対なアフィン接続 $\nabla^{(+1)}$, $\nabla^{(-1)}$ が存在し、$(S, g_U, \nabla^{(+1)}, \nabla^{(-1)})$ は双対平坦空間となる。また函数 $D : S \times S \to \mathbb{R}$ で、任意の $p, q \in S$ に対し $D(p\|q) \geq 0$ であり等号成立は $p = q$ のときに限るものに対して

$$g_{ij}^D := D[\partial_i\partial_j\|\cdot] = D[\cdot\|\partial_i\partial_j] = -D[\partial_i\|\partial_j]$$

により行列 $g^D = [g_{ij}^D]$ を定めるとこれは半正定値となる。但し $D[\cdot\|\cdot]$ は $S \times S$ の対角成分 Δ への制限を表す。この g^D が正定値、即ち S 上の Riemann 計量を定めるとき D を contrast 函数と呼ぶ。contrast 函数があると S 上の α 接続も自然に定まり、$(S, g^D, \nabla^{(\alpha)})$ は統計多様体となる。

[1]アフィン座標系は大域的に定まっているとし、その存在範囲については言及しない。

2.2. **シンプレクティック多様体とか.** M を多様体、ω を M 上の 2 形式とする。ω の定めるベクトル場から 1 形式への対応を $\omega^\flat$ で表す：$\omega^\flat : \Gamma(TM) \to \Gamma(T^*M)$.

定義 2.2. $d\omega = 0$ であり $\omega^\flat$ が線型同型のとき ω を M 上のシンプレクティック構造（形式）、(M, ω) をシンプレクティック多様体と呼ぶ。M 上の函数 $f \in C^\infty(M)$ に対し $\omega^\flat(X_f) = df$ を満たすベクトル場 X_f を f の Hamilton ベクトル場と呼ぶ。

$M = T^*\mathbb{R}^n = \{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})\}$ に対し

$$\omega_0 := dp_i \wedge dq^i$$

とすると $(T^*\mathbb{R}^n, \omega_0)$ はシンプレクティック多様体である（総和記法を使用。以後、度々使用)、$T^*\mathbb{R}^n$ 上の函数 H に対する Hamilton ベクトル場は

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}$$

となる。即ち Hamilton 方程式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \end{cases}$$

が得られる。この ω_0 を正準（シンプレクティック）構造と呼ぶ。

対称性がある場合に保存量が存在する事を主張するのが Noether の定理であるが、これを数学的に定式化した運動量写像[2]を定義する。G をコンパクト Lie 群、$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする。G がシンプレクティック多様体 (M, ω) に Hamilton 的に作用しているとする。即ちシンプレクティック形式 ω を保ち（任意の $g \in G$ に対し $g^*\omega = \omega$)、$X \in \mathfrak{g}$ の誘導する M 上の無限小作用 $X_M \in \Gamma(TM)$ が M 上の Hamilton ベクトル場（$X \in \mathfrak{g}$ に対し $\omega^\flat(X_M) = d\mu_X$ を満たす M 上の函数 μ_X が存在)。このとき

$$\mu_X(p) = \langle \mu(p), X \rangle, \qquad p \in M,$$

を満たす写像 $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ を運動量写像と云う[3]。$\mathbb{R}^n$ に加法群 $(\mathbb{R}^n, +)$ が作用している場合には線型運動量、$\mathbb{R}^2$ に S^1 が回転として作用している場合には角運動量となる。

3. 双対空間上の力学

本節では双対平坦空間の直積と余接束の関係を利用して、双対平坦空間上の力学を考察する。

[2]moment map または momentum map の訳（map は mapping となることも)。モーメント写像と訳される場合もある。お好みで。

[3]同変性を仮定する場合もある。また運動量写像が固有なら G のコンパクト性は要らない場合が多い。μ の存在性の為に G を半単純としたり、$H^1(M; \mathbb{R}) = \{0\}$ とする場合もある。

3.1. 双対平坦空間とシンプレクティック構造・Hamilton ベクトル場. 多様体上に contrast 函数があると統計構造が定まったが、contrast 函数から $S \times S$ 上のシンプレクティック構造を定める事も出来る。特に S が双対平坦空間の場合に、双対構造とこのシンプレクティック構造の関係を述べるのが本節の目的である。$S \times S$ 上のシンプレクティック構造が contrast 函数から次のように定まる。

$D : S \times S \to \mathbb{R}$ を contrast 函数とし、$S \times S$ から T^*S への写像を

$$\begin{array}{rcl} d_1 D : S \times S & \to & T^*S \\ (\xi, \xi') & \mapsto & (\xi, d_1 D) \end{array}$$

で定める。ここで $d_1 D = \frac{\partial D}{\partial \xi^i} d\xi^i$ は $S \times S$ の第一成分に沿う D の外微分を表す。この写像によって T^*S 上の正準シンプレクティック形式 $d\theta_0$ を引き戻して

$$\omega(\xi, \xi') := (d_1 D)^*(-d\theta_0) = \frac{\partial D}{\partial \xi^i \partial \xi'^j} d\xi^i \wedge d\xi'^j$$

と置く。この ω は $S \times S$ 上のシンプレクティック構造を定める[4]。このシンプレクティック構造 ω は $\{\xi\} \times S$ と $S \times \{\xi'\}$ を Lagrange 部分多様体として含む事が一つの特徴である。

例 3.1. $S = \mathbb{R}^n$ とし、$D : S \times S \to \mathbb{R}$ を

$$D(\xi \| \xi') = \frac{1}{2} \|\xi - \xi'\|^2$$

で定義するとこれは contrast 函数であり、これより定まる $\mathbb{R}^{2n}$ 上のシンプレクティック構造は $T^*\mathbb{R}^n$ 上の正準シンプレクティック構造

$$\omega_0 = \sum_i d\xi^i \wedge d\xi'^i = \delta_{ij} d\xi^i \wedge d\xi'^j$$

である。

例 3.2. (S, g, ∇, ∇^*) を双対平坦空間とする。この canonical divergence D は contrast 函数であった。このとき D より定まる $S \times S$ 上のシンプレクティック形式は

$$\omega_0 = -g'_{ij} d\theta^i \wedge d\theta'^j = d\eta'_i \wedge d\theta^i = -g'_{ij} g^{ik} d\eta_k \wedge d\theta'^j = -g^{ij} d\eta_i \wedge d\eta'_j$$

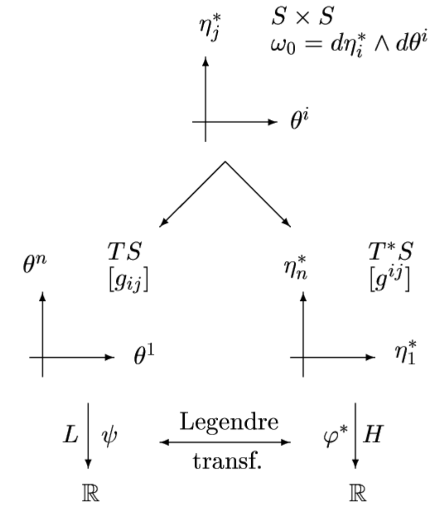
となる。但し $(\theta^1, \ldots, \theta^n)$ は ∇-アフィン座標系で、$(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ は ∇^*-アフィン座標系。

以下でこの例を詳しく見ていくことにする。ここで得られたシンプレクティック構造は次のようにしても得られる。双対平坦空間の直積の成分を区別するために、$S \times S$ を $S_1 \times S_2$ と添字を付け、第二成分の座標系などには全て $*$ を付す。$(\theta^1, \ldots, \theta^n)$ を $S_1 \times S_2$ の第一成分 S_1 の ∇-アフィン座標系、$(\eta_1^*, \ldots, \eta_n^*)$ を第二成分 S_2 の ∇^*-座標系とし、$S_1 \times S_2$ 上のシンプレクティック構造を

$$\omega_0 = d\eta_i^* \wedge d\theta^i$$

[4] D の 2 階微分は対角成分 Δ の近傍上では非退化であるが、$S \times S$ 全体では非退化とは限らないので、ω は Δ の近傍上のシンプレクティック形式でしかない。しかしながら非退化であるような範囲は特に問題にしないので、ここでは ω は $S \times S$ 全体でシンプレクティック構造を定めると仮定する。

で定める。これは第一成分 S_1 を多様体 S（の接空間）と見なし、第二成分 S_2 を S 上の余接束のファイバーと見なして定めた正準シンプレクティック構造である。これは上で canonical divergence D を用いて定めた $S \times S$ 上のシンプレクティック構造と同じである。このとき第一成分 S_1 上のポテンシャル函数 ψ と第二成分 S_2 上のポテンシャル函数 φ^* は解析力学の意味での Legendre 変換となっている。



canonical divergence D はシンプレクティック多様体 $(S_1 \times S_2, \omega_0)$ 上の函数だから、D の Hamilton ベクトル場を計算する事が出来る。

$$D(p\|q) := \varphi(p) + \psi^*(q) - \eta_i(p)\theta^{*i}(q)$$

として D の Hamilton ベクトル場 X_D を計算してみる。

$$dD = g_{ij}(\theta^i - \theta^{*i})d\theta^j + g^{*ij}(\eta_i^* - \eta_i)d\eta_j^* = (\theta^i - \theta^{*i})d\eta_i + (\eta_i^* - \eta_i)d\theta^{*i}$$

から

$$X_D = -g^{*ij}(\eta_i^* - \eta_i)\frac{\partial}{\partial\theta^j} + g_{ij}(\theta^i - \theta^{*i})\frac{\partial}{\partial\eta_j^*}$$

となる。

次に $D' : S \times S \to \mathbb{R}$ を

$$D'(q\|q) := \varphi^*(p) + \psi(q) - \eta_i^*(p)\theta^i(q)$$

で定める（∇ に対する divergence のつもり）。このとき

$$dD' = \frac{\partial\varphi^*}{\partial\eta_i^*}d\eta_i^* + \frac{\partial\psi}{\partial\theta^i}d\theta^i - \theta^i d\eta_i^* - \eta_i^* d\theta^i = (\theta^{*i} - \theta^i)d\eta_i^* + (\eta_i - \eta_i^*)d\theta^i$$

から

$$X_{D'}(q,p) = (\theta^i(q) - \theta^{*i}(p))\frac{\partial}{\partial\theta^i} + (\eta_i(q) - \eta_i^*(p))\frac{\partial}{\partial\eta_i^*}$$

が得られる。

これより S 上のポテンシャル函数 $\psi(\theta), \varphi(\eta)$ に関する勾配流方程式が得られる。以下でそれを説明したいのであるが、その前に双対平坦空間 S 上の勾配流について知られている事を纏めておく。詳しくは Nakamura [16], Fujiwara-Amari [10], 藤原 [9] を参照の事。

(S, g, ∇, ∇^*) を双対平坦空間とする。このとき次が成立する。

事実 3.3. $q \in S$ を fix し、S 上の函数を $U(p) := D(q\|p)$ で定める。このポテンシャルに関する勾配流方程式

$$\dot{\theta} = -\operatorname{grad} U(\theta) \tag{3.1}$$

の解は

$$\eta(p(t)) = \eta(q) + (\eta(p(0)) - \eta(q))e^{-t}$$

で与えられ、特にこれは ∇^*-測地線に沿って q に収束する。

方程式 (3.1) を局所座標系、η 座標系（∇^*-アフィン座標系）で表すと、それぞれ

$$\dot{\theta}^i = -g^{ij}\partial_j U(\theta), \quad \dot{\eta} = -(\eta - \eta(q))$$

となる。

一般に、多様体上に凸なポテンシャル函数が与えられると、多様体上の双対（平坦）構造を構成出来る。事実 3.3 はその場合でも成立する。また指数型分布族の場合に ∇ として m-接続、∇^* として e-接続を取ると（取り方に注意）、ポテンシャルは

$$U(\eta) = \int p \log p dx + \mathrm{const}.$$

となり、これはエントロピーの最勾配方程式となる。これを η の双対座標 θ で表す事で、Ornstein-Uhlenbeck 過程の形になる。

モデル空間が $\mathcal{P}$ の指数型分布族 S と仮定出来る場合、$\mathcal{P}$ 上の (3.1) から誘導される S 上の発展方程式について次が成立する。

事実 3.4. $S = \{p_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ を $\mathcal{P}$ 内の指数型分布族とする。q を経験分布とし、$\mathcal{P}$ 上の函数を $U(p) := D(q\|p)$ で定める。$\mathcal{P}$ 上の (3.1) より誘導される勾配流方程式は $K = U|_S$ として

$$\dot{\theta} = -\operatorname{grad} K(\theta) \qquad (\text{or } \dot{\eta} = -\eta) \tag{3.2}$$

で与えられ、次が成立する：

(i) (3.2) の解は q に対する最尤推定に収束する。

(ii) $\dim S = 2m$ のとき

$$Q_k = \partial_{2k}K, \quad P^k = -\frac{1}{\partial_{2k-1}K}, \quad H = -Q_k P^k$$

とすると、(3.2) は Q_k と P^k をそれぞれ位置と運動量とした Hamilton 方程式

$$\begin{cases} \dot{Q}_k = -\frac{\partial H}{\partial P^k} \\ \dot{P}^k = \frac{\partial H}{\partial Q_k} \end{cases}$$

と同値。また $H_k := Q_k P^k$ は互いに独立な運動の定数。

これは勾配流方程式 (3.2), または (3.1) が Hamilton 方程式として表せる事を述べているが、変数変換が少々奇妙に見える。そこで、これが何をしているのかを以下で説明する。簡単のため $m = 2$, 即ち $\dim S = 2$ の場合に述べる。S の座標系を (η_1, η_2) とする。但し $\eta_2 > 0$ とする（事実 3.4 と置き方が逆になるが、S を上半平面とする為）。このとき S 上のシンプレクティック構造

$$\omega = \frac{d\eta_1 \wedge d\eta_2}{\eta_2^2}$$

を考える。いま

$$Q = \eta_1, \quad P = -\frac{1}{\eta_2}$$

と置くと $\omega = -dP \wedge dQ$ となる事が容易に判る。即ち (Q, P) は ω に対する Darboux 座標系である（符号が逆とか小さいことは気にしない）。ω に対する Darboux 座標系が得られたので、考えたい方程式 (3.2) をこの座標系で表してみると

$$\dot{\eta} = -\eta \iff \begin{cases} \dot{Q} = -Q \\ \dot{P} = P \end{cases} \tag{3.3}$$

となる（定数項は無視した）。これで Darboux 座標系によって考えたい方程式が表されたので、これを Hamilton 方程式とする為には Hamilton 函数 H を求めれば良い。Hamilton 函数 H に対する Hamilton ベクトル場 X_H は

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial P}\frac{\partial}{\partial Q} - \frac{\partial H}{\partial Q}\frac{\partial}{\partial P}$$

だから、Hamilton 方程式は

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} \\ \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} \end{cases} \tag{3.4}$$

となる。あとは (3.3) と (3.4) を見比べると、H は

$$\begin{cases} -Q = \frac{\partial H}{\partial P} \\ P = -\frac{\partial H}{\partial Q} \end{cases}$$

を解けばよい。よって $H = -PQ$.

これで勾配流方程式 (3.2) または (3.1) が Hamilton 方程式で表せた訳であるが、何故このような事を思い付くのであろうか。それは理解出来ないから、後付けで理由を少々補足しておく。先ず S は上半平面であり、その上に定めたシンプレクティック構造は Poincaré 計量に付随するものである。これである程度の納得は出来るであろう。しかしながら、今考えている S の座標系 η は期待値座標系であり、正規分布族は期待値座標系では上半平面とはならない（平均と分散、または平均と標準偏差をとれば上半平面であるが)。「勾配流方程式を Hamilton 方程式と出来ればそれで満足」との立場を取るのであればこれでも良いのかもしれないが、腑に落ちない部分が残る。

さて少々話を戻して、双対平坦空間の直積 $S_1 \times S_2$ 上に正準シンプレクティック構造を引き戻した話を思い出す。このとき、∇ に関する D' の Hamilton ベクトル場は

$$X_{D'}(q,p) = (\theta^i(q) - \theta^{*i}(p))\frac{\partial}{\partial\theta^i} + (\eta_i(q) - \eta_i^*(p))\frac{\partial}{\partial\eta_i^*}$$

であった。これの第二成分

$$(\eta_i(q) - \eta_i^*(p))\frac{\partial}{\partial\eta_i^*}$$

が、勾配流方程式を η 座標系で表した $\dot{\eta} = -(\eta - \eta(q))$ である。よって、$S_1 \times S_2$ の第二成分 S_2 を (q,p) を通るように平行移動して S と同一視をすると、$X_{D'}$ の第二成分の制限が勾配流方程式を導く。因みに第一成分で同様に行うと、θ 座標系のポテンシャルに関する勾配流方程式が得られる。

3.2. **運動量写像.** ここでは $S \times S$ 上の適当な Hamilton 作用を定める事で、S が運動量写像の像として得られる事を見、例を述べる。

$S \times S \cong T^*S = \{(\theta^1, \dots, \theta^n, \eta_1^*, \dots, \eta_n^*)\}$ とする。加法群 $G_+ = (\mathbb{R}^n, +)$ の $S \times S$ への作用を

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (\theta^1, \dots, \theta^n, \eta_1^*, \dots, \eta_n^*) = (\theta^1, \dots, \theta^n, \eta_1^* + a_1, \dots, \eta_n^* + a_n)$$

で定める。容易に判るとおり、無限小生成元 $\partial^{*\alpha} = \frac{\partial}{\partial\eta_\alpha^*}$ $(1 \le \alpha \le n)$ に対し $i(\partial^{*\alpha})\omega_0 = d\theta^\alpha$ となる。よって G_+ の作用に関する運動量写像 $\mu_+ : S \times S \to S$ が得られた。

次にこれを角運動量を用いたものに書き換える。$S \times S = \{(\theta^1, \dots, \theta^n, \eta_1^*, \dots, \eta_n^*)\}$ とし、$\mathbb{C}^n = \{(w_1, \dots, w_n)\}$ を考える。$S \times S \to \mathbb{C}^n$ を

$$(\theta^1, \dots, \theta^n, \eta_1^*, \dots, \eta_n^*) \mapsto (w_i = \exp(\theta^i + \sqrt{-1}\eta_i^*))$$

で定める。このとき $S \times S$ 上のシンプレクティック構造 $\omega_0 = d\eta_i^* \wedge d\theta^i$ に対応する $\mathbb{C}^n$ 上の形式は

$$\tilde{\omega} = \sqrt{-1}\sum_{i,j} g_{ij}\frac{dw_i}{w_i} \wedge \frac{d\bar{w}_j}{\bar{w}_j}$$

となる。このとき

$$d\theta^i = \frac{dw_i}{w_i} + \frac{d\bar{w}_i}{\bar{w}_i}$$

が成立する。

次に $\mathbb{C}^n$ へのトーラス T^n への作用を通常通りの積により定めると、この作用に関する無限小生成元は

$$\tilde{v}_\alpha = \sqrt{-1}(w_\alpha\frac{\partial}{\partial w_\alpha} - \bar{w}_\alpha\frac{\partial}{\partial\bar{w}_\alpha}), \qquad 1 \le \alpha \le n,$$

となる。このとき

$$i(\tilde{v_\alpha})\tilde{\omega} = g_{ij}\left(\frac{dw_j}{w_j} + \frac{d\bar{w}_j}{\bar{w}_j}\right) = g_{ij}d\theta^j = d\eta_i$$

から、この T^n の作用に関する運動量写像 $\mu_\times : \mathbb{C}^n \to S$ を得る。

これら線型運動量の場合と角運動量の場合を図に纏めると下のようになる：

$$
\begin{tikzcd}
\overset{\tilde{\omega}}{\mathbb{C}^n} \arrow[dr, "\mu_\times"'] & & \overset{\omega}{S \times S} \arrow[ll, "\exp"'] \arrow[dl, "\mu_+"] \arrow[rr, "d_1 D"] & & \overset{d\theta_0}{T^*S} \\
& \underset{g\ (:\ \text{Fisher metric})}{S} & & &
\end{tikzcd}
$$

S として有限集合上の非負確率分布全体の集合を取り、M を複素射影空間とする事で次の例を得る（簡単のため２次元の場合を述べる）。

例 3.5. $M = \mathbb{C}P^2 = \{[z_0 : z_1 : z_2]; z_i \in \mathbb{C},\ i = 0, 1, 2,\ (z_0, z_1, z_2) \neq (0, 0, 0)\}$ を２次元複素射影空間とする。$w_1 := z_1/z_0,\ w_2 := z_2/z_0$ で $\mathbb{C}P^2$ の非等質座標を表す。$\theta^i := \log |w_i|^2$ と置き、M 上の反標準束 K_M^{-1} 上の Hermite 計量を

$$
h = e^{-\psi}\left(\sqrt{-1}\frac{dw_1 \wedge d\bar{w}_1}{|w_1|^2}\right) \wedge \left(\sqrt{-1}\frac{dw_2 \wedge d\bar{w}_2}{|w_2|^2}\right),
$$

$$
\psi(\theta^1, \theta^2) = -\log 9 - \theta^1 - \theta^2 + 3\log(1 + e^{\theta^1} + e^{\theta^2})
$$

で定める。この計量の Chern 形式は

$$
\omega_M = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial h = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\psi = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial\theta^i \partial\theta^j}\frac{dw_i}{w_i} \wedge \frac{d\bar{w}_j}{\bar{w}_j}. \tag{3.5}
$$

となる。ω_M は Einstein-Kähler 計量であり、M 上の Fubini-Study 計量の定数倍である事に注意する。（ψ は、とある方程式の解（ソリューション）。）

$\mathbb{C}P^2$ への T^2 の自然な作用に対する運動量写像 $\mu : \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{R}^2$ は

$$
\mu = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta^1}, \frac{\partial\psi}{\partial\theta^2}\right) = \left(-1 + \frac{3|w_1|}{1 + |w_1| + |w_2|},\ -1 + \frac{3|w_2|}{1 + |w_1| + |w_2|}\right)
$$

で与えられ、その像 $\mu(\mathbb{C}P^2)$ は $(-1, -1)$, $(2, -1)$, $(-1, 2)$ を頂点とする三角形 Δ_2 である（因みに重心は原点）。

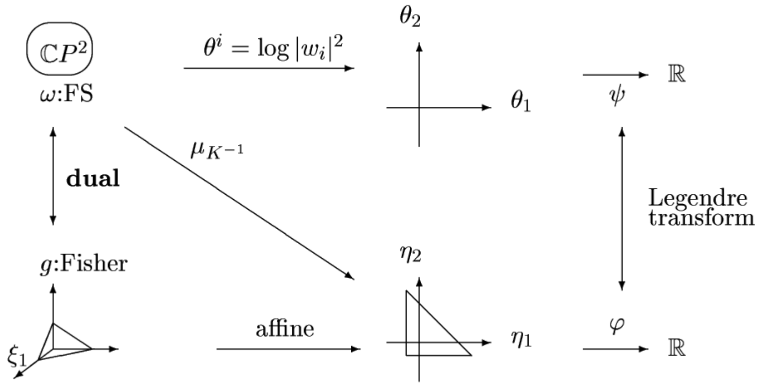
$\mathcal{P}_3$ を３つの要素より成る集合上の非負確率分布全体の空間とする。$\mathcal{P}_3$ のパラメータ空間として $\Xi = \{(\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2, \xi^1 > 0, \xi^2 > 0, \xi^1 + \xi^2 < 1\}$ と取る。

$$
\begin{cases}
\eta_1 = 3\xi^1 - 1, \\
\eta_2 = 3\xi^2 - 1
\end{cases}
$$

と置く事により、$\mathcal{P}_3$ から Δ_2 への全単射を得る。(η_1, η_2) は $\mathcal{P}_3$ 上の ∇^*-アフィン座標系である。さらに $\eta_i = \partial\psi/\partial\theta^i$ $(i = 1, 2)$ だから (θ^1, θ^2) は $\mathcal{P}_3$ の ∇-アフィン座標系である。ψ の Legendre 変換 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して

$$
\mathrm{Hess}(\varphi) = \frac{1}{3}\left[\frac{\delta_{ij}}{\xi_i} + \frac{1}{1 - \xi_1 - \xi_2}\right]_{1 \leq i, j \leq 2}
$$

が成立し、φ は $\mathcal{P}_3$ 上の Fisher 計量の (η_1, η_2) に関するポテンシャル函数である。即ち φ の Hesse 行列として $\mathcal{P}_3$ 上の Fisher 計量が得られる。一方、ψ の Hesse 行列として $M = \mathbb{C}P^2$ 上の Fubini-Study 計量 (3.5) が得られる。



この対応は一般の次元でも成立する。この意味で Fisher 計量と Fubini-Study 計量の間の双対的対応が得られる。

この例は元々 Nakamura [15] で得られたものを、複素幾何学的に解釈し直したものである。この定式化は満渕 [12] による[5]。

4. 統計多様体上のシンプレクティック構造

本節では統計多様体がシンプレクティック構造を許容する条件などを考える。統計多様体上には既に Riemann 計量があるから、シンプレクティック構造を定める為には概複素構造を考えれば良い。今後使用する（可能性のある）概複素構造の性質を纏めておく。

補題 4.1. J を Riemann 多様体 (M, g) 上の概複素構造とする。$(1,1)$ テンソル場 J^* を $g(JX, Y) = -g(X, J^*Y)$ で定義するとき、次が成立する。
(i) $(J^*)^* = J$, $(J^*)^2 = -1$;
(ii) $g(JX, J^*Y) = g(X, Y)$;
(iii) 次は同値：(a) $J = J^*$, (b) $g(JX, JY) = g(X, Y)$, (c) $g(JX, Y) = g(X, -JY)$.
(iv) (S, g, ∇, ∇^*) を統計多様体、J を S 上の概複素構造とする。任意の $X, Y \in \Gamma(TM)$ に対し $g((\nabla_Z J)X, Y) = -g(X, (\nabla^*_Z J^*)Y)$.

次にシンプレクティック構造と概複素構造、Riemann 計量との関係を見るために、次のように定義する。

定義 4.2. シンプレクティック多様体 (M, ω) 上の概複素構造 J について
　(i) $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$,
　(ii) $\omega(JX, X) > 0$
が成立するとき、J は ω と**両立する**とか**整合的**と云う。

J が ω と両立するとき $g(X, Y) := \omega(JX, Y)$ により M 上の Riemann 計量が定まる。ここではシンプレクティック構造と両立する概複素構造を定めたが、逆に ω, J, g の 3 つのうち

[5] この文献 [12] が入手可能かはよく判らないが、小生は何故か判らないが持っている。

どれか２つが定まると、残り一つは必然的に決まる。このような関係を満たす３つ組 (ω, J, g) を概 Kähler 構造と呼び、更に J が可積分のとき Kähler 構造と呼ぶ。条件 (i) を Hermite 性と云う事もある。この条件がないと g と J から ω を定められない。先の補題 4.1 (iii) から、これは $J = J^*$ と同値である。

次の補題は本節の目的の一つである統計多様体がシンプレクティック構造を許容する為の充分条件を与える。証明は直接計算のみである（証明は略するの意）。

補題 4.3. (S, g, ∇, ∇^*) を統計多様体、J を $g(JX, JY) = g(X, Y)$ を満たす S 上の概複素構造とする。任意の $X, Y \in \Gamma(TS)$ に対し $\nabla^*_X Y = \nabla_X Y - J(\nabla_X J)Y$ と $(\nabla_X J)Y = (\nabla_Y J)X$ が成立するなら、$\omega(X, Y) := g(JX, Y)$ で定められる S 上の２形式 ω は閉形式であり ∇ に関して平行。即ち ω は S 上のシンプレクティック構造であり ∇ はシンプレクティック接続。

これで統計多様体がシンプレクティック構造を許容する為の条件が得られた。更に逆も成立する。しかしそれを述べる前に、シンプレクティック接続について簡単に述べておく。

シンプレクティック多様体 (M, ω) 上のアファイン接続 ∇ がシンプレクティック構造を保って捩れ無し、即ち $\nabla\omega = 0$ と $T^\nabla = 0$ を満たすときシンプレクティック接続と呼ばれる。任意のシンプレクティック構造に対して、このような接続は常に存在する（捩れ無しのアファイン接続から具体的に構成出来る。またシンプレクティック接続の Christoffel 記号や曲率などの性質、シンプレクティック接続全体の集合上のシンプレクティック構造、変分的性質など色々な事が知られている。詳しくは Bourgeois-Cahen [5], Esrafilian-Salimi Moghaddam [8] などを参照の事）。

次は補題 4.3 の逆であり、シンプレクティック多様体が統計構造を許容する為の条件を与える。これも直接計算で証明出来る（証明は略するの意）。

補題 4.4. (M, ω) をシンプレクティック多様体、∇ を M 上のシンプレクティック接続とする。即ち ∇ は捩れ無しで ω を平行に保つ。J を ω と両立する M 上の概複素構造とする。即ち任意の $X, Y \in \Gamma(TM)$ に対し $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ であり $g(X, Y) := \omega(X, JY)$ で定義される２テンソルは M 上の Riemann 計量。このとき $\nabla^* = \nabla - J(\nabla J)$. 更に (M, g, ∇) が統計多様体である為の必要充分条件は $(\nabla_X J)Y = (\nabla_Y J)X$.

(M, g, ∇) が統計多様体であり (M, g, J, ω) が概 Kähler 多様体で、ω が ∇ に関して平行であるとき、５つ組 $(M, g, J, \omega, \nabla)$ をシンプレクティック統計多様体と呼びたい[6]。

補題 4.5. シンプレクティック統計多様体 $(M, g, J, \omega, \nabla)$ に対し、次が成立する：

(i) $\nabla^*\omega = 0$. 即ち ∇ の双対接続 ∇^* もシンプレクティック接続。

(ii) $\nabla^0 = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^*)$ とおくと $\nabla^0 g = 0$ かつ $T^{\nabla^0} = 0$. 即ち ∇^0 は Levi-Civita 接続。更に $\nabla^0 J = 0$. よって J は可積分[7]。

[6] 以下の命題 4.5 (ii) で述べているが、概複素構造 J は可積分となる。なので複素シンプレクティック統計多様体とか、統計 Kähler 多様体とか呼ぶべきかもしれない。

[7] 特に (M, J, g) は Kähler 多様体である事が従うが、Kähler 多様体について詳しくないので欄外でひっそりと注意しておく。

これも証明は直接計算による（証明は ry）。

次にシンプレクティック統計多様体 $(M, g, J, \omega, \nabla)$ は $R^\nabla = 0$ を満たすと仮定する[8]。このとき（局所）∇-平坦座標系 $(\theta^1, \dots, \theta^{2n})$ が存在する。更にこの座標系は

$$\omega = d\theta^1 \wedge d\theta^{n+1} + \cdots + d\theta^n \wedge d\theta^{2n}$$

を満たすとして良い。云い換えると $(\theta^1, \dots, \theta^{2n})$ は（局所）∇-平坦 Darboux 座標系である。即ち平坦なら、シンプレクティック幾何的に良い座標系がアフィン座標系で取れる。

$(\theta^1, \dots, \theta^{2n})$ を ∇-平坦 Darboux 座標系としたとき、双対座標系 $(\eta_1, \dots, \eta_{2n})$ は ∇^*-平坦 Darboux 座標系である。更に

$$J\frac{\partial}{\partial \eta_i} = \begin{cases} \partial/\partial\theta^{n+i} & (1 \leq i \leq n) \\ -\partial/\partial\theta^{i-n} & (n+1 \leq i \leq 2n) \end{cases} \tag{4.1}$$

が成立する。実際、$i \in \{1, \dots, n\}$ に対し $\omega(\partial_i, J\partial^j) = \delta_i^j$ と $\omega = \sum_k d\theta^k \wedge d\theta^{n+k}$ から $d\theta^{n+i}(J\partial^j) = \delta_i^j$ が成立し、よって $J\partial^j = \partial_{n+i}$ を得る。$i \in \{n+1, \dots, 2n\}$ の場合も同様に示せる。任意の i と j に対し $J\partial/\partial\theta^i$ は $\partial/\partial\theta^j$ と一致する事はない事に注意する（線型結合でも表せない）。

平坦 Darboux 座標系 $(\theta^1, \dots, \theta^{2n})$ において $\{\theta^1 = 0, \dots, \theta^n = 0\}$ で定められる部分多様体 L を考えると、ω は T^*L 上の正準シンプレクティック構造に他ならない。

前節の結果と合わせて定理の形に纏めておく。

定理 4.6. (i) (S, g, ∇, ∇^*) を双対平坦空間、D を S 上の canonical divergence とする。このとき $S \times S$ は D による T^*S 上の正準シンプレクティック構造の引き戻しである自然なシンプレクティック構造を許容する。このシンプレクティック構造に関して D' の Hamilton 流は Fisher 計量のポテンシャルについての勾配流を誘導する。

(ii) $(M, g, J, \omega, \nabla, \nabla^*)$ を (双対) 平坦なシンプレクティック統計多様体とする。このとき双対平坦空間 (S, g_S, ∇^S) で、M 上のシンプレクティック構造 ω が（局所的には）T^*S 上の正準シンプレクティック構造と同型となるものが存在する。

[8]命題 4.5 (ii) から J が可積分であるから、これは special Kähler 多様体である。

References

[1] R. Abraham and J.E. Marsden, Foundations of Mechanics, 2nd edition, Reading, Massachusetts, 1978.

[2] S. Amari, Differential geometry of curved exponential families—curvatures and information loss. Ann. Statist. 10 (1982), no. 2, 357–385.

[3] 甘利俊一, 長岡浩司, 情報幾何の方法, 岩波講座応用数学, 東京:岩波書店, 1993

[4] S. Amari and H. Nagaoka, Methods of information geometry, Translated from the 1993 Japanese original by Daishi Harada. Translations of Mathematical Monographs, 191. American Mathematical Society, Providence, RI; Oxford University Press, Oxford, 2000. x+206 pp. ISBN 0-8218-0531-2

[5] F. Bourgeois and M. Cahen, A variational principle for symplectic connections, J. Geometry and Physics 30 (1999), 233–265.

[6] S.K. Donaldson, 'Constant scalar curvature metrics on toric surfaces', arXiv:0805.0128v1 [math.DG].

[7] S. Eguchi, 'Geometry of minimum contrast', *Hiroshima Math. J.* **22** (1992), 631–647.

[8] E. Esrafilian and H.R. Salimi Moghaddam, Symplectic connections induced by the Chern connection, Differential Geometry - Dynamical Systems 10 (2008), 99–106.

[9] 藤原 彰夫, Dynamical Systems on Statistical Models(State of art and perspectives of studies on nonlinear integrable systems), 数理解析研究所講究録８２２『非線型可積分系の研究の現状と展望』, pp. 32–42 (1993).

[10] A. Fujiwara and S. Amari, "Gradient systems in view of information geometry," Physica D, vol. 80, pp. 317-327 (1995).

[11] V. Guillemin and S. Sternberg, Symplectic techniques in Phisics, Cambridge Uviv. Press, Cambridge, 1984.

[12] 満渕俊樹, Kähler 幾何学における運動量写像, 慶応大学（？）での集中講義のノート, 1995.

[13] H. Matsuzoe, 'Geometry of contrast functions and conformal geometry', *Hiroshima Math. J.* **29** (1999), 175–191.

[14] 長岡 浩司, 情報幾何の基礎概念, 大阪市立大学数学研究所ミニスクール「情報幾何への入門と応用」, 2006. `http://math01.sci.osaka-cu.ac.jp/~ohnita/2006/inf_geom/minis.html`

[15] Y. Nakamura, 'Completely integrable gradient systems on the manifolds of Gaussian and multinomial distributions', *Japan J. Indust. Appl. Math.* **10**, 179–189 (1993).

[16] Y. Nakamura, 'Gradient system associated with probability distributions', *Japan J. Indust. Appl. Math.* **11**, 21–30 (1994).

[17] T. Noda, Symplectic structures on Statistical manifolds, preprint.

〒 573-1121
大阪府枚方市楠葉花園町８番１号
大阪歯科大学 数学教室

noda-t@cc.osaka-dent.ac.jp