ヘッセ領域の等位曲面に関する公式

魚橋 慶子　　東北学院大学　工学部機械知能工学科　　　uohashi@tjcc.tohoku-gakuin.ac.jp

（東北学院大学　多賀城情報幾何学研究集会（2010 年 12 月 17 日・18 日）：修正版）

本稿ではヘッセ領域を構成する凸関数の，等位曲面に関する公式・定理をいくつか紹介する．最近の結果については証明を詳しく述べる．

1．ヘッセ領域と等位曲面の基礎

$\{x^1, \ldots, x^{n+1}\}$，D を $\mathbf{A}^{n+1}$ の標準アファイン座標系，標準平坦アファイン接続 (i.e., $Ddx^i = 0$) とする．領域 $\Omega \subset \mathbf{A}^{n+1}$ 上の関数 φ の Hessian $Dd\varphi = \displaystyle\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j$ が非退化であるとき，$(\Omega, D, g = Dd\varphi)$ はヘッセ領域（Hessian domain）であるという（[HS] [S]）．そして $(\Omega, D, g = Dd\varphi)$ は平坦統計多様体となる．ここで (N, ∇, h) が統計多様体であるとは，多様体 N 上の擬 Riemann 計量 h と捩率 0 のアファイン接続 ∇ に対し ∇h が対称 $(0,3)$-テンソル場であるときをいう．統計多様体 (N, ∇, h) と $(N, \bar{\nabla}, \bar{h})$ が α-共形同値であるとは，N 上のある関数 ϕ が次をみたすときをいう．

$$\begin{aligned} \bar{h}(X,Y) &= e^{\phi} h(X,Y), \\ h(\bar{\nabla}_X Y, Z) &= h(\nabla_X Y, Z) - \frac{1+\alpha}{2} d\phi(Z) h(X,Y) + \frac{1-\alpha}{2}\{d\phi(X)h(Y,Z) + d\phi(Y)h(X,Z)\} \end{aligned}$$

($X, Y, Z \in TN$．TN は N 上のベクトル場全体の集合)．(N, ∇, h) は，平坦統計多様体に局所的に α-共形同値であるとき α-共形平坦であると呼ばれる（[K]）．

M を，$(n+1)$-次元ヘッセ領域 $(\Omega, D, g = Dd\varphi)$ 上の関数 φ の等位曲面とする．以下，g は正定値，M は n-次元単連結（$n \geq 2$）とする．M 上に誘導される部分多様体としての接続，計量を Ω 上の場合と同じ記号 D，g で表す.（文献 [HS] [UOF1] ではヘッセ領域を $(\Omega, \tilde{D}, \tilde{g})$）と記し，等位曲面を (M, D, g) と記しているので注意せよ.）このとき次が従う．

Theorem 1.([UOF1]) ヘッセ領域 (Ω, D, g) を平坦統計多様体とみなすとき，等位曲面 (M, D, g) は (Ω, D, g) の 1-共形平坦統計部分多様体となる．

Theorem 2.([UOF1]) Riemann 計量をもつ n-次元 1-共形平坦統計多様体（$n \geq 2$）は，局所的に $(n+1)$-次元平坦統計多様体の統計部分多様体として表される．

Corollary.([UOF1]) (Ω, D, g) の等位曲面からなる統計部分多様体 (M, D, g) について，D' は対称 Ricci テンソルをもつ射影平坦接続であり，D は対称 Ricci テンソルをもつ双対射影平坦接続（[I]）である．

ここでアファイン接続 D の双対接続を D' とする．つまり次式が成り立つとする．

$$Xg(Y,Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D'_X Z) \quad \text{for} X, Y, Z \in TM$$

Theorem 1. の証明概要:

$\tilde{E}$ を g による Ω 上の勾配ベクトル場とする．すなわち $X \in T\Omega$ に対し，$g(X, \tilde{E}) = d\varphi(X)$ と定義する．Ω の部分集合 $\Omega_o = \{x \in \Omega \mid d\varphi_x \neq 0\}$ 上のベクトル場 E を次で定める．

$$E = -d\varphi(\tilde{E})^{-1}\tilde{E} \quad \text{on} \quad \Omega_o \quad \text{：正規化された勾配ベクトル場}$$

$x \in \Omega_o$ に対し，E_x は g に関して T_xM に直交する．ここで M は φ の等位曲面で x を含むものとする（M は n 次元であることに注意）．id を等位曲面 M から Ω への標準的はめ込みとする．アファイン接

続 D とアファインはめ込み (id, E) に対し，M 上の誘導アファイン接続 D^E，アファイン基本形式 g^E を次で定義する．

$$D_X Y = D^E_X Y + g^E(X,Y)E \quad \text{for } X, Y \in TM$$

このとき部分多様体としての構造 (M, D, g) とアファインはめ込みとしての構造 (M, D^E, g^E) が一致することを，計算により確かめることができる．一方 (id, E) は非退化等積アファインはめ込みであり，したがって (M, D^E, g^E) は 1-共形平坦統計多様体となる．ゆえに統計部分多様体 (M, D, g) は 1-共形平坦である． □

本節最後に，アファインはめ込みの性質について整理する．等位曲面を記号 (M, D, g) でしばしば表してきた．しかし一般の 1-共形平坦統計多様体を意識する場合，(M, ∇^M, h^M) などの記法を用いることとする．

1-共形平坦統計多様体 (M, ∇^M, h^M) を $\mathbf{A}^{n+1}$ へ実現する非退化アファインはめ込み（non-degenerate affine immersion）を，(x^M, E^M) とする．すなわち

$$D_X Y = \nabla^M_X Y + h^M(X,Y)E^M \quad \text{for } X, Y \in TM.$$

という分解が成り立つとする．ヘッセ領域の等位曲面を 1-共形平坦統計多様体とみなす場合，x^M を標準的はめ込み id とし，横断的ベクトル場 E^M を，正規化された勾配ベクトル場 E を等位曲面上へ制限したものとすればよい.（勾配ベクトル場との関連を意識するため，横断的ベクトル場の記号に文字 E を用いている.）

ι^M が x^M の余法線はめ込み（conormal immersion）であるとは次をみたすことをいう．

$$p \in M \text{ に対し，} \langle \iota^M(p), Y_p \rangle = 0 \ \text{ for } Y_p \in T_pM, \ \ \langle \iota^M(p), E^M_p \rangle = 1.$$

ここで $T_p\mathbf{A}^{n+1}$ を $\mathbf{A}^{n+1}$ とみなす．また $a \in \mathbf{A}^*_{n+1}$ と $b \in \mathbf{A}^{n+1}$ のペアリングを $\langle a, b \rangle$ とする．E^M の取り方により ι^M が異なることに注意せよ．

余法線はめ込み ι^M とその微分 ι^M_* は次をみたすことが知られている．

Proposition 1. （[NP] [NS]）
(i) $\langle \iota^M_*(Y), E^M \rangle = 0, \ \ \langle \iota^M_*(Y), X \rangle = -h^M(Y, X) \ \text{ for } X, Y \in TM$
(ii) ι^M は等積（equiaffine）である．すなわち

$$D_X E^M = S^{E^M}(X) \in TM \ \text{ for } X \in TM$$

（TM に直交する成分は $\tau^{E^M}(X) = 0$）となる．

S をシェイプ作用素（shape operator），τ を横断的接続形式（transversal connection form）という．

2. 曲面の集合がヘッセ領域となる条件

前節 Theorem 2. は 1-共形平坦統計多様体が 1 個与えられた場合，それが平坦統計多様体（ヘッセ領域）の部分多様体（特に等位曲面）として表されるというものである．ゆえに次の疑問が生じる．

疑問： 1-共形平坦統計多様体の複数個の集まり（葉層構造）が与えられたとき，それぞれを部分多様体とするような $(n+1)$-次元平坦統計多様体（$(n+1)$-次元ヘッセ領域）を「共通に」1 つ選ぶことは可能だろうか.

疑問を解決するため，ヘッセ領域 (Ω, D, g) ならびに等位曲面 (M, D, g) の性質を追記する．

Proposition 2.
(i) 写像 $\iota : \Omega_o \to \Omega^*_o = \iota(\Omega_o) \subset \mathbf{A}^*_{n+1}$ （$\iota(p) = \iota^M(p)$ for $p \in M$（等位曲面 M 上の値を余法線 ι^M の値

で定義する））は微分同形である．
(ii) Ω_o 上で E はなめらか，かつ $D_E E = \mu E \quad \text{for } \mu \in \mathbf{R}$（各点に対し定まる実数）をみたす．
(iii) 等位曲面 M 上で局所的に $S^{E^M}(X) = -(d\lambda(E)+1)(X)$．ここで λ はある開集合 $\Omega_1 \subset \Omega$ 上の関数で，次をみたすものとする．

$$e^{\lambda(\hat{p})}\iota(p) = \iota(\hat{p}),\ \hat{p} \in \Omega_1 \text{ for } p \in M \cap \Omega_1.$$

Proof. (i) で定義された ι は，$\{x^1, \ldots, x^{n+1}\}$ の双対座標系

$$\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \quad where \ \ x_i = x_i^* \circ \tilde{\iota} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$$

を定める勾配写像 $\tilde{\iota}$ に一致する（[HS] [S]）．勾配写像 $\tilde{\iota} : \Omega \to \Omega^* = \iota(\Omega) \subset \mathbf{A}$ は微分同形であるから，ι も微分同形である．

(ii) を示す．まず $(D_E g)(E, X)$ と $(D_X g)(E, E)$（$X \in TM$）を計算する．計量 g に関する勾配ベクトル場 $\tilde{E}$ の定義ならびに $E = -d\varphi(\tilde{E})^{-1}\tilde{E}$ より次が従う．

$$\begin{aligned}
(D_E g)(E, X) &= E(g(E, X)) - g(D_E E, X) - g(E, D_E X) \\
&= -g(D_E E, X) - d\varphi(\tilde{E})^{-2} d\varphi(D_{\tilde{E}} X) \\
&= -g(D_E E, X) - d\varphi(\tilde{E})^{-2}(\tilde{E}(d\varphi(X)) - (D_{\tilde{E}} d\varphi)(X)) \\
&= -g(D_E E, X).
\end{aligned}$$

上記において $d\varphi(X) = 0$，$(D_{\tilde{E}} d\varphi)(X) = g(\tilde{E}, X) = 0$ を用いた．さらに次が成り立つ．

$$(D_X g)(E, E) = X(g(E, E)) - 2g(D_X E, E) = -2g(S^{E^M}(X), E) = 0.$$

(D, g) に関するコダッチの方程式（the Codazzi equation）より次が成り立つ．

$$(D_E g)(E, X) = (D_X g)(E, E) = 0.$$

ゆえに $D_E E = \mu E$ for $\mu \in \mathbf{R}$. したがって等位曲面 (M, D, g) は性質 (ii) をみたす．

(iii) を示す．まず $(D_X g)(E, Z)$，$(D_E g)(X, Z)$（$X, Z \in TM$）を計算する．

$$\begin{aligned}
(D_X g)(E, Z) &= X(g(E, Z)) - g(D_X E, Z) - g(E, g(X, Z)E) \\
&= -g(S^{E^M}(X), Z) - g(X, Z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(g(X, Z))|_p &= E(e^{\lambda} g(X, Z))|_p = (Ee^{\lambda})|_p g(X, Z) \\
&= (E\lambda)|_p e^{\lambda(p)} g(X, Z) = d\lambda(E)|_p g(X, Z), \\
(D_E g)(X, Z) &= d\lambda(E)|_p g(X, Z).
\end{aligned}$$

コダッチの方程式より

$$(D_X g)(E, Z) = (D_E g)(X, Z).$$

である．ゆえに等位曲面 (M, D, g) は性質 (iii) $S^{E^M}(X) = -(d\lambda(E)+1)(X)$ をみたす． □

Remark 1. Hao 氏と志磨氏は，E に対してではなく正規化されていない勾配 $\tilde{E}$ に対して $(D_{\tilde{E}} g)(\tilde{E}, X)$ と $(D_X g)(\tilde{E}, \tilde{E})$ を計算した．そして $\tau^{\tilde{E}} = 0$（等積）となるための必要十分条件が $D_{\tilde{E}} \tilde{E} = \mu \tilde{E}$ であることを示した（[HS]）．Proposition 2 (ii) の導出において我々は彼らの計算法を参考にしている．

疑問への答は次のとおりである．

Theorem 3. *n-次元 1-共形平坦統計多様体の $(n+1)$-次元葉層構造（foliation）$\mathcal{F}$ が与えられたとする．それぞれの葉（leaf）(M, ∇^M, h^M)（$M \in \mathcal{F}$）がヘッセ領域 $(\hat{\Omega}, D, g)$ の異なる等位曲面に統計部分多様体として一致し，かつ $\Omega = \cup_{M\in\mathcal{F}} x^M(M) \subset \mathbf{A}^{n+1}$ と $\hat{\Omega}_o$ が微分同形であるための必要十分条件は，次の (i) (ii) (iii) をみたすことである．ここで (M, ∇^M, h^M) を $\mathbf{A}^{n+1}$ へ実現する非退化アファインはめ込みを，(x^M, E^M) とし，$x^M(M)$ と M を同一視する．*
(i) 写像 $\iota : \Omega \to \Omega^* = \cup_{M\in\mathcal{F}} \iota^M(M) \subset \mathbf{A}^*_{n+1}$ （$\iota(p) = \iota^M(p)$ for $p \in M$）は微分同形である．ここで ι^M を x^M の余法線はめ込みとする．
(ii) Ω 上のベクトル場 E（$E_p = E^M_p$ for $p \in M$）はなめらか，かつ $D_E E = \mu E$ for $\mu \in \mathbf{R}$（各点に対し定まる実数）をみたす．
(iii) M 上で局所的に $S^{E^M}(X) = -(d\lambda(E) + 1)(X)$．ここで λ はある開集合 $\Omega_1 \subset \Omega$ 上の関数で次をみたすとする．

$$e^{\lambda(\hat{p})}\iota(p) = \iota(\hat{p}),\ \hat{p} \in \Omega_1 \text{ for } p \in M \cap \Omega_1.$$

Proof. 必要性は Proposition 2 より従う．十分性を以下に示す．
領域 Ω 上のリーマン計量 g を次で定義する．

$$\begin{aligned} g(Y, X) &= h^M(Y, X), \quad g(E, E) = 1 \\ g(Y, E) &= 0 \quad \text{for } X, Y \in TM \subset T\Omega \end{aligned}$$

(D, g) がコダッチの方程式

$$(D_X g)(Y, Z) = (D_Y g)(X, Z) \quad \text{for all} \quad X, Y \text{and } Z \in T\Omega$$

をみたせばリーマン計量 g がヘッセ計量となることが，知られている．ゆえにコダッチの方程式を「場合分け」により示す．

(case 1) X, Y and $Z \in TM$ のとき

$$\begin{aligned} (D_X g)(Y, Z) &= X(g(Y, Z)) - g(D_X Y, Z) - g(Y, D_X Z) \\ &= X(h^M(Y, Z)) - g(\nabla^M_X Y, Z) - g(Y, \nabla^M_X Z) \\ &= (\nabla^M_X h^M)(Y, Z) \end{aligned}$$

が成り立つ．同様に

$$(D_Y g)(X, Z) = (\nabla^M_Y h^M)(X, Z)$$

である．等積アファインはめ込み (x^M, E^M) に関するコダッチの方程式

$$(\nabla^M_X h^M)(Y, Z) = (\nabla^M_Y h^M)(X, Z)$$

（[NS]）を用いると，(D, g) に関するコダッチの方程式を得る．

(case 2) $X, Y \in TM$ and E on M のとき

$$\begin{aligned} (D_X g)(Y, E) &= X(g(Y, E)) - g(h^M(X, Y)E, E) - g(Y, D_X E) \\ &= -h^M(X, Y) - h^M(Y, S^{E^M}(X)) \end{aligned}$$

が成り立つ．同様に

$$(D_Y g)(X, E) = -h^M(X, Y) - h^M(X, S^{E^M}(Y))$$

である．等積アファインはめ込み（equiaffine immersion）(x^M, E^M) に関するリッチの方程式（the Ricci equation）

$$h^M(S^{E^M}(X), Y) = h^M(X, S^{E^M}(Y))$$

（[NS]）を用いると，(D, g) に関するコダッチの方程式

$$(D_X g)(Y, E) = (D_Y g)(X, E)$$

を得る．

(case 3) $X, Z \in TM$ and E on M のとき, (case 2) の計算過程と同様に

$$(D_X g)(E, Z) = -h^M(X, Z) - h^M(S^{E^M}(X), Z)$$

が成り立つ．余法線写像の性質 $\langle \iota_*^M(X), E^M \rangle = 0$, $X \in TM$ と，条件 (iii) $D_E E = \mu E$ を思い出す．すると $D_E X = 0$ for $X \in TM$ が従う．さらに余法線写像の族 $\{(\iota^{\hat{M}}, h^{\hat{M}})\}_{\hat{M} \in \mathcal{F}}$ の要素は互いに射影同値（projectively equivalent）かつ共形同値（conformally equivalent）である．したがってある関数 λ が存在し　$h^{\hat{M}} = e^{\lambda} h^M$　をみたす（[NS]）．ゆえに $p \in M$ に対し次が成り立つ．

$$\begin{aligned} E(g(X, Z))|_p &= E(e^{\lambda} h^M(X, Z))|_p = (Ee^{\lambda})|_p h^M(X, Z) \\ &= (E\lambda)|_p e^{\lambda(p)} h^M(X, Z) = d\lambda(E)|_p h^M(X, Z) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} (D_E g)(X, Z) &= E(g(X, Z)) - g(D_E X, Z) - g(X, D_E Z) \\ &= d\lambda(E)|_p h^M(X, Z) \end{aligned}$$

となる．条件 (iv) よりコダッチの方程式

$$(D_X g)(E, Z) = (D_E g)(X, Z)$$

を得る．

(case 4) $X \in TM$ and E on M のとき

$$(D_X g)(E, E) = X(g(E, E)) - g(g(X, E)E, E) - g(E, g(X, E)E) = 0$$

である．さらに，$D_E X = 0$ and $D_E E = \mu E$ より

$$(D_E g)(X, E) = X(g(X, E)) - g(D_E X, E) - g(X, D_E E) = 0$$

となる．ゆえに次のコダッチの方程式が成り立つ．

$$(D_X g)(E, E) = (D_E g)(X, E)$$

(case 5) $X = Y = E$ and $Z \in T\Omega$ のとき

$$(D_X g)(Y, Z) = (D_Y g)(X, Z) = (D_E g)(E, Z)$$

は明らか．

以上より (D, g) はコダッチの方程式をみたす．ゆえに文献 [S] Proposition 2.1 より，g はヘッセ計量となる．また計量 g の定義から，葉層構造 $\mathcal{F}$ のそれぞれの葉 (M, ∇^M, h^M) がヘッセ領域 (Ω, D, g) の等位曲面それぞれに対応する． □

3. 拡張ピタゴラスの定理の拡張

前節の内容の「続き」ではない．しかし等位曲面のなす葉層構造の直交葉層を利用した定理を紹介する．ρ を平坦統計多様体（ヘッセ領域）(Ω, D, g) 上のダイバージェンスとすれば，次が成り立つ．

Theorem 4.([UOF2]) 平坦統計多様体 (Ω, D, g) とその等位曲面 M，3 点 $p, q \in M$，$r \in \Omega$ に対し，q, r を結ぶ D'-測地線と $T_q M$ が直交するとき，

$$\rho(p, r) = \mu\rho(p, q) + \rho(q, r)$$

が成り立つ．ここで，$\iota(r) = \mu\iota(q)$, $\mu \in \mathbf{R}$ とする．

補足：

「直交」とは，第 1 節で述べた余法線はめ込み ι^M の性質

$$p \in M \text{ に対し，} \langle \iota^M(p), Y_p \rangle = 0 \quad \text{for } Y_p \in T_p M$$

を指す．また ι の「向き」が等しい Ω 上の点の集合は D'-測地線となる．よってすべての等位曲面に直交する曲線の族，すなわち直交葉層は D'-測地線の族となる．

References

[AN] S.Amari and H.Nagaoka: Method of information geometry, Amer. Math. Soc., Providence, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[HS] J.H.Hao and H.Shima: *Level surfaces of non-degenerate functions in* $\mathbf{R^{n+1}}$, Geom. Dedicata **50** (1994), 193-204.

[I] S.Ivanov: *On dual-projectively flat affine connections*, J. of Geom. **53** (1995), 89-99.

[K] T.Kurose: *On the divergence of 1-conformally flat statistical manifolds*, Tôhoku Math.J. **46** (1994), 427-433.

[NP] K.Nomizu and U.Pinkall: *On the geometry and affine immersions*, Math. Z. **195** (1987), 165-178.

[NS] K. Nomizu and T. Sasaki: Affine Differential Geometry: Geometry of Affine Immersions, Cambridge Univ. Press (1994).

[S] H.Shima: The geometry of Hessian Structures, World Sci., 2007.

[UOF1] K.Uohashi, A.Ohara and T.Fujii: *1-conformally flat statistical submanifolds*, Osaka J. math. **37** No.2 (2000), 501-507.

[UOF2] K.Uohashi, A.Ohara and T.Fujii: *Foliations and divergences of flat statistical manifolds*, Hiroshima Math. J., **30**, No.3 (2000), 403-414.