

Craig-Sakamoto定理とその周辺

吉澤 真太郎

(Shintaro Yoshizawa)

御殿場 基礎科学研究会

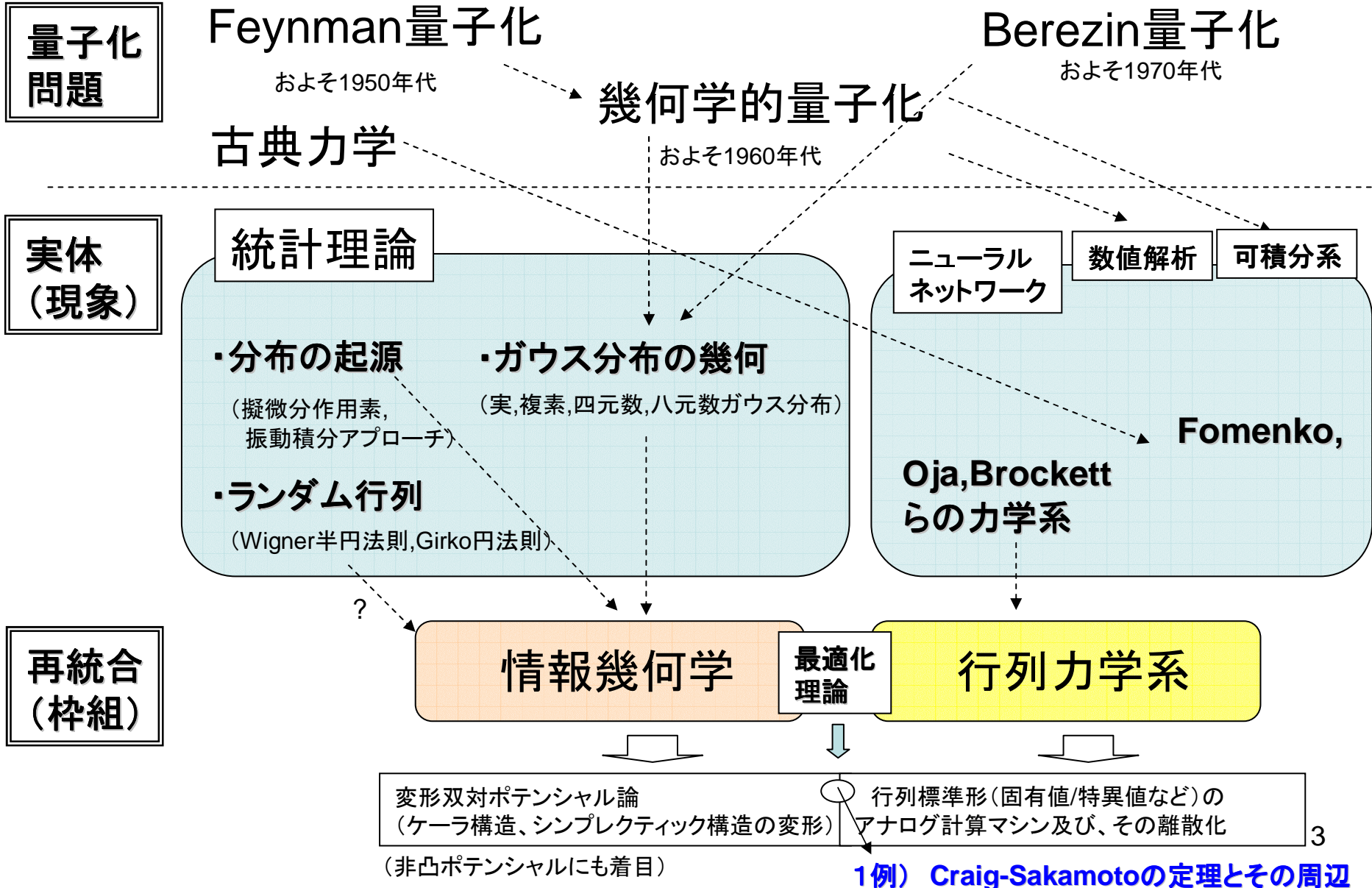
(Gotemba Theoretical Science Research)

2010年12月18日

東北学院大学 多賀城情報幾何研究集会 2010

- 1.はじめに
- 2.Craig-Sakamotoの定理とは
- 3.Craig-Sakamotoの定理の解析的変形
- 4.周辺の話題
 Wolfe双対定理とダイバージェンス
- 5.まとめ

1.はじめに(構想)



1.はじめに(背景)

A_i : 行列 $x \in \mathbb{C}^n$ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

関数 $f(x) = \det(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n)$

いろいろな所に現れる

統計学

二次形式統計量間の独立性問題
(Craig-Sakamoto定理)

Craig1943
Sakamoto1949
Ogawa1948
Tausky1958

代数的位相幾何

- ・行列固有値の重根問題
- ・代数曲線の双対理論

VonNeumann-Wigner1929
Adams-Lax-Phillips1967
Lax1982

最適化と制御

- ・線形行列不等式の表現
- ・準代数集合の凸性

Helton-Vinnikov2007
Lassere2009
Renegar2006

可積分系

Manakov1976

Manakovの方法

偏微分方程式論

Garding1951
Lax1958

双曲多項式と双曲型偏微分方程式
のコーシー問題

2.Craig-Sakamotoの定理とは

Ogawa
1950の証明
OsakaMathJ

平均0のn次元正規分布に従う確率変数ベクトル

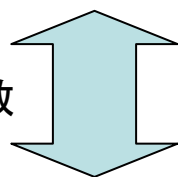
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \sim (2\pi)^{-n/2} \exp\{(-\mathbf{x}^T \mathbf{x})/2\}$$

変数 \mathbf{x} の2次形式統計量 q_1, q_2

$$q_1 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad q_2 = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j$$

が独立。ここで、 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ は実対称行列

モーメント母関数

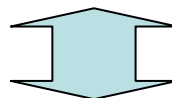


$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, \beta) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[\frac{\alpha}{2} q_1 + \frac{\beta}{2} q_2 - (\mathbf{x}^T \mathbf{x})/2\right] dx \\ &= \varphi(\alpha, 0) \varphi(0, \beta) \end{aligned}$$

$$\det(I - \alpha A - \beta B) = \det(I - \alpha A) \cdot \det(I - \beta B) \text{ for } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

CS条件

A, Bが正規行列の場合も成立
Taussky1958



$$AB=0$$

3.Craig-Sakamotoの定理の再考

60年以上に渡り初等的に再考されている。

- ・Harvilleら1997 微分と代数を使い、対称行列に対し証明
- ・Olkin1997 行列式の結果を活用し、実対称行列に対し証明
- ・Maroulasら2000 一般の正方行列に対し、固有空間分解でCS条件を特徴付
- ・Li2000 実対称行列の成分と最大固有値の大小関係で証明
- ・Matsuura2003Olkin の結果を一般化し、正規行列に対し証明
- ・Carrieuら2009 対称行列の対角成分の性質と零固有空間の性質で証明

CS条件の両辺の対数をとった量は
logdetポテンシャル



CS条件を解析的に扱った変形族に対し、
 $AB=0$ が導出可能か？

3.Craig-Sakamotoの定理の解析的変形

解析的捩じり変形:
(作用素ゼータ関数)

$$\frac{d}{dt} \text{tr}(X^{-t})|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \lambda_i^{-t} \right) |_{t=0} = -\log \det(X)$$

ここでXは正方行列、 λ_i はその固有値

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

リーマンゼータ関数

$$\log \det(I - \alpha A - \beta B) = \log \det(I - \alpha A) + \log \det(I - \beta B) \text{ for } \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$



解析的変形族に対してCraig-Sakamoto定理の拡張を試みる

3. 変形Craig-Sakamotoの定理 (命題)

Prop.

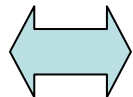
$$A, B \in C^{n \times n}, A^* A = A A^*, B^* B = B B^*$$

$$0 < \forall \gamma \neq 1,$$

$$(I - \alpha A - \beta B)^\gamma + I = (I - \alpha A)^\gamma + (I - \beta B)^\gamma$$

for $\forall \alpha, \beta \in C$

$$s.t. \quad \det(I - \alpha A - \beta B) \neq 0, \det(I - \alpha A) \neq 0, \det(I - \beta B) \neq 0$$



$$AB=BA=0$$

Wolfe 双対
(制約最適化)

ラグランジュ関数

双対ラグランジュ関数
(ハミルトン関数)

Legendre 双対
(凸最適化, 情報幾何)

注:ベクトルに対する不等号は 成分に対する不等号を示す

【主問題】

微分可能な R^n 上の目的関数 $f(x)$,
制約関数 $h_i(x)$ ($i=1,2,\dots,m$)
に対して, 条件 $h(x) \leq 0 \in R^m$ のもとで,
目的関数を最小化

【双対問題】

ラグランジュ関数 $L(x,y)=f(x)+y^T h(x)$ 及び
ラグランジュ乗数 $y(\geq 0)$ に対して,
条件 $\partial_x L(x,y)=0$ のもとで, $L(x,y)$ を最大化

4. 双対定理(補足)

f, h_i ($i=1, 2, \dots, m$)は \underline{C} 上の凸関数, \underline{C} は \mathbb{R}^n の凸集合

【主問題】

$$\text{Min}\{f(x) \mid x \in \underline{C}, h_i(x) \leq 0 (i=1, 2, \dots, m)\}$$

Lagrange双対:

【双対問題】

$$\text{Sup}\{ \phi(y) \mid 0 \leq y, \phi(y) = \inf\{f(x) + \sum_{i=1}^m y_i h_i(x) \mid x \in \underline{C}\} \}$$

Wolfe双対:

$\underline{C} = \mathbb{R}^n$, 上記【主問題】に対して

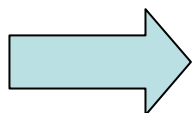
【双対問題】

$$\text{Sup}\{f(x) + \sum_{i=1}^m y_i h_i(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq y, \partial_x f(x) + \sum_{i=1}^m y_i \partial_x h_i(x) = 0\}$$

弱双対定理

$f(x), h_i(x)$: 凸関数

x^* は主問題の実行可能解, (x, y) は双対問題の実行可能解



$$f(x^*) \geq L(x, y)$$

双対定理

$f(x), h_i(x)$: 凸関数, $\{x \in \mathbb{R}^n | h(x) \leq 0\}$ が内点をもつ, または

$h_i(x)$ がすべて一次式とする。このとき

(x^*, y^*) が双対問題の最適解で $f(x^*) = L(x^*, y^*)$ を満たすような

$y^* \in \mathbb{R}^m$ が存在する。

Prop.

$\partial_x L(x, y) = 0$ が x について陽に表示 (i.e. $x = g(y)$) できるとき,

(i) 関数 $f^*(y) = f(g(y)) + y^T h(g(y))$ は凹

(ii) $h(g(y_2)) = 0$ に対して

$$D(y_1, y_2) = f(g(y_1)) - f^*(y_2)$$

が成立する。

ここで, D は f^* とそのルジャンドル双対関数から構成したダイバージェンスである。

4. Wolfe-Legendre 双対定理 (補足)

【補足1】

相補性条件: $y_i h_i(x) = 0 (i=1, 2, \dots, m)$ が成り立たない場合, 双対ギャップが生じる。

【補足2】

前記命題の前提条件は, Hadamardの大域的逆関数定理の前提条件を満たす程度のものとする。

Hadamardの大域的逆関数定理:

可微分写像 $f: R^n \ni x \mapsto f(x) \in R^n$ の微分 $Df(x)$ が各点 x で可逆で, 微分の逆写像 $(Df(x))^{-1}$ のノルムが x によらず一様有界であれば, f は R^n の大域的微分同相写像である。

定理の証明は, 例えば藤原「ファインマン経路積分の数学的方法」の13章にある。

【例】Wolfe-Legendre 双対

主問題

下記制約条件を満たす正定値対称行列 X に対し, 関数

$$f(X) = \text{tr}(F_0 X) - \log \det(X)$$

を最小化。 制約条件: $\text{tr}(F_i X) = c_i$ ($i=1, 2, \dots, m$)

ここで, F_0 は正定値対称, F_i ($i=1, 2, \dots, m$) は対称行列。

双対問題

制約条件 $0 < F_0 - \sum y_i F_i$ を満たす $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$ に対し,
下記関数を最大化:

$$f^*(y) = c^T y + \log \det(F_0 - \sum_{i=1}^m y_i F_i) + n$$

2つの話題について新しい結果を紹介した

☆解析変形族版Craig-Sakamoto定理

☆Wolfe双対定理とダイバージェンスとの関係

おわり