Craig-Sakamoto定理とその周辺

吉澤 真太郎
（Shintaro Yoshizawa）
御殿場 基礎科学研究会
(Gotemba Theoretical Science Research)
2010年12月18日

東北学院大学　多賀城情報幾何研究集会　2010

内容

GT
SR

1.はじめに

2.Craig-Sakamotoの定理とは

3.Craig-Sakamotoの定理の解析的変形

4.周辺の話題
Wolfe双対定理とダイバージェンス

5.まとめ

1.はじめに（構想）

GT SR

量子化問題

Feynman量子化
およそ1950年代

Berezin量子化
およそ1970年代

幾何学的量子化
およそ1960年代

古典力学

実体（現象）

統計理論

・分布の起源
（擬微分作用素,
振動積分アプローチ）

・ガウス分布の幾何
（実,複素,四元数,八元数ガウス分布）

・ランダム行列
（Wigner半円法則,Girko円法則）

ニューラルネットワーク

数値解析

可積分系

Fomenko,

Oja, Brockettらの力学系

再統合（枠組）

?

情報幾何学

最適化理論

行列力学系

変形双対ポテンシャル論
（ケーラ構造、シンプレクティック構造の変形）

行列標準形（固有値/特異値など）の
アナログ計算マシン及び、その離散化

（非凸ポテンシャルにも着目）

1例） Craig-Sakamotoの定理とその周辺

1.はじめに（背景）

GT SR

A_i ： 行列　$x \in C^n$　$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$

関数　$f(x) = \det(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n)$

いろんな所に現れる

統計学

二次形式統計量間の独立性問題
（Craig-Sakamoto定理）

Craig1943
Sakamoto1949
Ogawa1948
Taussky1958

代数的位相幾何

- 行列固有値の重根問題
- 代数曲線の双対理論

Von Neumann-Wigner1929
Adams-Lax-Phillips1967
Lax1982

最適化と制御

- 線形行列不等式の表現
- 準代数集合の凸性

Helton-Vinnikov2007
Lassere2009
Renegar2006

可積分系

Manakov1976

Manakovの方法

偏微分方程式論

Garding1951
Lax1958

双曲多項式と双曲型偏微分方程式のコーシー問題

2.Craig-Sakamotoの定理とは

GT SR

Ogawa
1950の証明
Osaka Math J

平均0のn次元正規分布に従う確率変数ベクトル

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n \sim (2\pi)^{-n/2} \exp\{(-x^T x)/2\}$$

変数xの2次形式統計量q_1, q_2

$$q_1 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad q_2 = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

が独立。ここで，$A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ は実対称行列

モーメント母関数

$$\varphi(\alpha, \beta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \exp\left[\frac{\alpha}{2} q_1 + \frac{\beta}{2} q_2 - (x^T x)/2\right] dx$$

$$= \varphi(\alpha, 0)\varphi(0, \beta)$$

$$\det(I-\alpha A-\beta B) = \det(I-\alpha A)\cdot\det(I-\beta B) \text{ for } \forall \alpha, \beta \in R$$

CS条件

A,Bが正規行列の場合も成立
Taussky1958

AB=0

3.Craig-Sakamotoの定理の再考

GT SR

60年以上に渡り初等的に再考されている。

- Harvilleら1997 微分と代数を使い、対称行列に対し証明
- Olkin1997 行列式の結果を活用し、実対称行列に対し証明
- Maroulasら2000 一般の正方行列に対し、固有空間分解でCS条件を特徴付
- Li 2000 実対称行列の成分と最大固有値の大小関係で証明
- Matsuura2003 Olkinの結果を一般化し、正規行列に対し証明
- Carrieuら2009 対称行列の対角成分の性質と零固有空間の性質で証明

CS条件の両辺の対数をとった量は
logdetポテンシャル

↓

CS条件を**解析的に捩じった変形族**に対し、
AB=0が導出可能か？

3.Craig-Sakamotoの定理の解析的変形

GT SR

解析的捩じり変形：
（作用素ゼータ関数）

$$\frac{d}{dt}\mathrm{tr}(X^{-t})|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \lambda_i^{-t}\right)|_{t=0} = -\mathrm{logdet}(X)$$

ここでXは正方行列、λ_iはその固有値

$$\boxed{\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}}$$

リーマンゼータ関数

$$\boxed{\mathrm{logdet}(I-\alpha A-\beta B) = \mathrm{logdet}(I-\alpha A) + \mathrm{logdet}(I-\beta B) \text{ for } \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}}$$

解析的変形族に対してCraig-Sakamoto定理の拡張を試みる

3.変形Craig-Sakamotoの定理(命題)

GT
SR

Prop.

$$A, B \in C^{n\times n}, A^*A = AA^*, B^*B = BB^*$$

$$0 < \forall \gamma \neq 1,$$

$$(I - \alpha A - \beta B)^\gamma + I = (I - \alpha A)^\gamma + (I - \beta B)^\gamma$$

$$for \quad \forall \alpha, \beta \in C$$

$$s.t. \quad \det(I - \alpha A - \beta B) \neq 0, \det(I - \alpha A) \neq 0, \det(I - \beta B) \neq 0$$

$\Leftrightarrow$ AB=BA=0

4.双対定理（最適化理論）

GT
SR

Wolfe双対
（制約最適化）

ラグランジュ関数

双対ラグランジュ関数
（ハミルトン関数）

Legendre双対
（凸最適化，情報幾何）

4.Wolfe双対問題

GT SR

注：ベクトルに対する不等号は 成分に対する不等号を示す

【主問題】

微分可能なR^n上の目的関数$f(x)$,
制約関数$h_i(x)$（$i=1,2,\ldots,m$)
に対して，条件$h(x) \leqq 0 \in R^m$のもとで，
目的関数を最小化

【双対問題】

ラグランジュ関数$L(x,y)=f(x)+y^T h(x)$ 及び
ラグランジュ乗数$y(\geqq 0)$に対して，
条件$\partial_x L(x,y)=0$のもとで，$L(x,y)$を最大化

4.双対定理(補足)

f, h_i $(i=1,2,\cdots,m)$は<u>***C***</u>上の凸関数，<u>***C***</u>はR^n の凸集合

【主問題】

$$\mathrm{Min}\ \{\ f(x)\ |\ x\in \underline{\boldsymbol{C}},\ h(x) \leqq 0\ (i=1,2,\cdots,m)\ \}$$

Lagrange双対:

【双対問題】

$$\mathrm{Sup}\{\phi(y)\ |\ 0\leqq y\ ,\ \phi(y)=\inf\{\ f(x)+\sum_{i=1}^{m} y_i h_i(x)\ |\ x\in \underline{\boldsymbol{C}}\ \}\ \}$$

Wolfe双対:

<u>***C***</u>$=R^n$，上記【主問題】に対して

【双対問題】

$$\mathrm{Sup}\ \{\ f(x)+\sum_{i=1}^{m} y_i h_i(x)\ |\ x\in R^n, 0\leqq y,\ \partial_x f(x)+\sum_{i=1}^{m} y_i\ \partial_x h_i(x)=0\ \}$$

4.Wolfe双対定理

GT SR

弱双対定理

$f(x),h_i(x)$：凸関数
x^*は主問題の実行可能解,(x,y)は双対問題の実行可能解

⇒ $f(x^*) \geqq L(x,y)$

双対定理

$f(x),h_i(x)$：凸関数，$\{x \in R^n | h(x) \leqq 0\}$が内点をもつ，または
$h_i(x)$がすべて一次式とする。このとき
(x^*,y^*)が双対問題の最適解で$f(x^*)=L(x^*,y^*)$を満たすような
$y^* \in R^m$が存在する。

4.Wolfe-Legendre双対定理

GT SR

Prop.

$\partial_x L(x,y)=0$がxについて陽に表示(i.e. $x=g(y)$)できるとき,
(i)関数$f^*(y)=f(g(y))+y^T h(g(y))$は凹
(ii)$h(g(y_2))=0$に対して

$$D(y_1,y_2)=f(g(y_1))-f^*(y_2)$$

が成立する。
ここで,Dはf*とそのルジャンドル双対関数から構成したダイバージェンスである。

4.Wolfe-Legendre双対定理（補足）

【補足１】
相補性条件：$y_i h_i(x)=0$ $(i=1,2,\cdots,m)$が成り立たない場合，
双対ギャップが生じる。

【補足２】
前記命題の前提条件は，Hadamardの大域的逆関数定理
の前提条件を満たす程度のものとする。

Hadamardの大域的逆関数定理：
可微分写像$f:R^n \ni x \mapsto f(x) \in R^n$の微分$Df(x)$が各点xで可逆で，
微分の逆写像$(Df(x))^{-1}$のノルムがxによらず一様有界であれば，
fはR^nの大域的微分同相写像である。

定理の証明は，例えば藤原「ファインマン経路積分の数学的方法」の13章にある。

GT SR

【例】Wolfe-Legendre双対

主問題

下記制約条件を満たす正定値対称行列Xに対し，関数

$$f(X)=tr(F_0X)-\log\det(X)$$

を最小化。 制約条件：$tr(F_iX)=c_i$ (i=1,2,･･･m)
ここで，F_0は正定値対称，F_i (i=1,2,･･･m)は対称行列。

双対問題

制約条件$0 < F_0-\sum y_iF_i$を満たす $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T\in R^m$に対し，
下記関数を最大化：

$$f^*(y)=c^Ty+\log\det(F_0-\sum_{i=1}^{m} y_iF_i)+n$$

5. まとめ

GT
SR

２つの話題について新しい結果を紹介した

☆解析変形族版Craig-Sakamoto定理

☆Wolfe双対定理とダイバージェンスとの関係

おわり