A characterization of pseudo-Einstein real hypersurfaces of a complex projective space

情報幾何への入門と応用　Ⅱ
2007/12/21～12/24
大阪市立大学

Mayuko Kon
Department of Mathematics,
Hokkaido University

Preliminalies.

CP^m: 複素射影空間, J: CP^mの複素構造,

$\tilde{\nabla}$: CP^mの共変微分,

M: CP^mの実超曲面, N: 単位法ベクトル場,

g: 誘導計量, ∇: 誘導接続.

$\xi = -JN$, $JX = PX + g(X, \xi)N$ とおく.

・ Gauss と Weingarten の公式

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX, Y)N,$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -AX.$$

(A :第二基本形式)

- Gaussの等式

R： M の曲率テンソル場

$$R(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(PY,Z)PX$$
$$- g(PX,Z)PY - 2g(PX,Y)PZ$$
$$+ g(AY,Z)AX - g(AX,Z)AY.$$

S： M のリッチテンソル場

$$S(X,Y) = (2m+1)g(X,Y) - 3g(X,\xi)g(Y,\xi)$$
$$trAg(AX,Y) - g(AX,AY).$$

- Codazziの等式

$$(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X$$
$$= g(X,\xi)PY - g(Y,\xi)PX - 2g(PX,Y)\xi.$$

M: 線織実超曲面

$\underset{def}{\Leftrightarrow}$ $T_0(x) = \{X \in T_x(M) \mid g(X, \xi) = 0\}$

によって定義される正則分布 T_0 が可積分,

積分多様体が全測地的部分多様体 CP^{m-1}.

M : 全臍的 $\underset{def}{\Leftrightarrow} AX = aX \quad (\forall X \in T_x M)$. ←存在しない

M : η -全臍的 $\underset{def}{\Leftrightarrow} AX = aX + bg(X, \xi)\xi$.

M :Einstein $\underset{def}{\Leftrightarrow} S(X, Y) = ag(X, Y)$. ←存在しない

M :pseudo-Einstein $\underset{def}{\Leftrightarrow} S(X, Y) = ag(X, Y) + bg(X, \xi)g(Y, \xi)$.

Problem

$M : CP^m \, (m \geq 3)$ の実超曲面.

リッチテンソル S が

$\forall X, Y \perp \xi, \quad S(X,Y) = ag(X,Y) \quad$ (a: function)

を満たすものを分類する.

c.f.

M :Einstein $\underset{def}{\Leftrightarrow} S(X,Y) = ag(X,Y).$

M :pseudo-Einstein $\underset{def}{\Leftrightarrow} S(X,Y) = ag(X,Y) + bg(X,\xi)g(Y,\xi).$

Motivation

$$T_0(x) = \{X \in T_x(M) \mid g(X, \xi) = 0\}$$

によって定義される正則分布 T_0 上の各種曲率,

第二基本形式の性質を調べる.

ξ が主曲率ベクトル場であるという条件の元では,
実超曲面 M の形がある程度決まり，多くの結果が
得られている.

⇒ ξ に関する条件を与えず，正則分布上の
各種曲率や第二基本形式の性質を調べたい.

M : 線織実超曲面

$\Rightarrow \xi$ は主曲率ベクトル場ではない.

M : η-全臍的

$\Rightarrow \xi$ は主曲率ベクトル場 $(A\xi = \exists \alpha \xi)$,
$m \geq 2$ のとき, M は最大2つの異なる定数の主曲率を持つ.

M :pseudo-Einstein

$\Rightarrow \xi$ は主曲率ベクトル場,
$m \geq 3$ のとき, M は最大3つの異なる定数の主曲率を持つ.

（関連する結果）

$M : CP^m (m \geq 3)$ の実超曲面, $JX = PX + g(X,\xi)N.$

$H : M$ 上のholomorphic 2-plane の断面曲率,

$$H(X) = g(R(X,PX)PX,X) \quad (X \perp \xi, g(X,X)=1).$$

Theorem A (Kimura, 1987）

M 上 H が定数であるとき, M は以下のいずれかである:

(a) 測地超球面の開集合 $(H > 4)$,
(b) 線織実超曲面 $(H = 4)$,
(c) 各leafがある CP^{m-1}に線織実超曲面 $(H = 4)$ として
含まれる, 余次元2のfoliationを持つ実超曲面.

Theorem B (Kon, 2007).

M : 複素空間形 $M^m(c)(m \geq 3)$ の実超曲面,

$\forall X, Y \perp \xi, \qquad g(AX, Y) = ag(X, Y)$

$\Rightarrow$

M は η -全臍的 であるか，線織実超曲面.

Theorem C (Kon, 2007).

M : 複素射影空間 $CP^m(m \geq 3)$ の実超曲面,

$\forall X, Y \perp \xi, \qquad g(AX, Y) = ag(X, Y)$

$\Rightarrow$

M は測地超球面であるか，線織実超曲面.

Main Theorem

Theorem D (Kon, 2007).

$M: CP^m (m \geq 3)$ の主曲率一定な実超曲面,

$\forall X, Y \perp \xi, \qquad S(X,Y) = ag(X,Y)$

$\Rightarrow$

M はpseudo-Einstein実超曲面.

※ $M: CP^m (m \geq 3)$ の極小実超曲面のとき,
$g(A\xi, \xi)$: constant
の条件のもと, 同様の結果が得られる.

Outline of the proof

リッチテンソルに対する条件から，接空間のある正規直交基底 $\{e_1, \cdots, e_{2m-2}, \xi\}$ に対し，

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & & & h_1 \\ & \beta & & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & 0 & & \\ & & & \beta & & & & \vdots \\ & & & & \lambda & & & \\ & & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & & \lambda & 0 \\ h_1 & 0 & & \cdots & & & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

さらに，互いに異なる主曲率が4個以上の場合，
$APe_1 = \beta e_2$ とおける.

（互いに異なる主曲率が最大3個のとき ⇒ pseudo-Einstein）

互いに異なる主曲率が4個以上のとき, Codazziの等式を用いて計算すると,

$$\nabla_{e_1} e_1 = \frac{(2\beta + a_1)h_1}{\beta - a_1} Pe_1, \qquad \nabla_{Pe_1} e_1 = \beta\xi, \quad \nabla_{\xi} e_1 = (3\beta - \alpha)Pe_1$$

これを用いて断面曲率 $g(R(e_1,\xi)\xi, e_1)$ を計算.

一方, Gaussの等式を用いて $g(R(e_1,\xi)\xi, e_1)$ を計算.

$\Rightarrow$ $a_1 = \beta$または $a_1 = \lambda$,

互いに異なる主曲率は多くて3個(矛盾) ■